ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

TOME XX

ANNÉE 1947

A la mémoire de

STANISŁAW ZAREMBA

KRAKÓW 1948

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

TOME XX

ANNÉE 1947

A la mémoire de

STANISŁAW ZAREMBA



KRAKÓW 1948



PRINTED IN POLAND

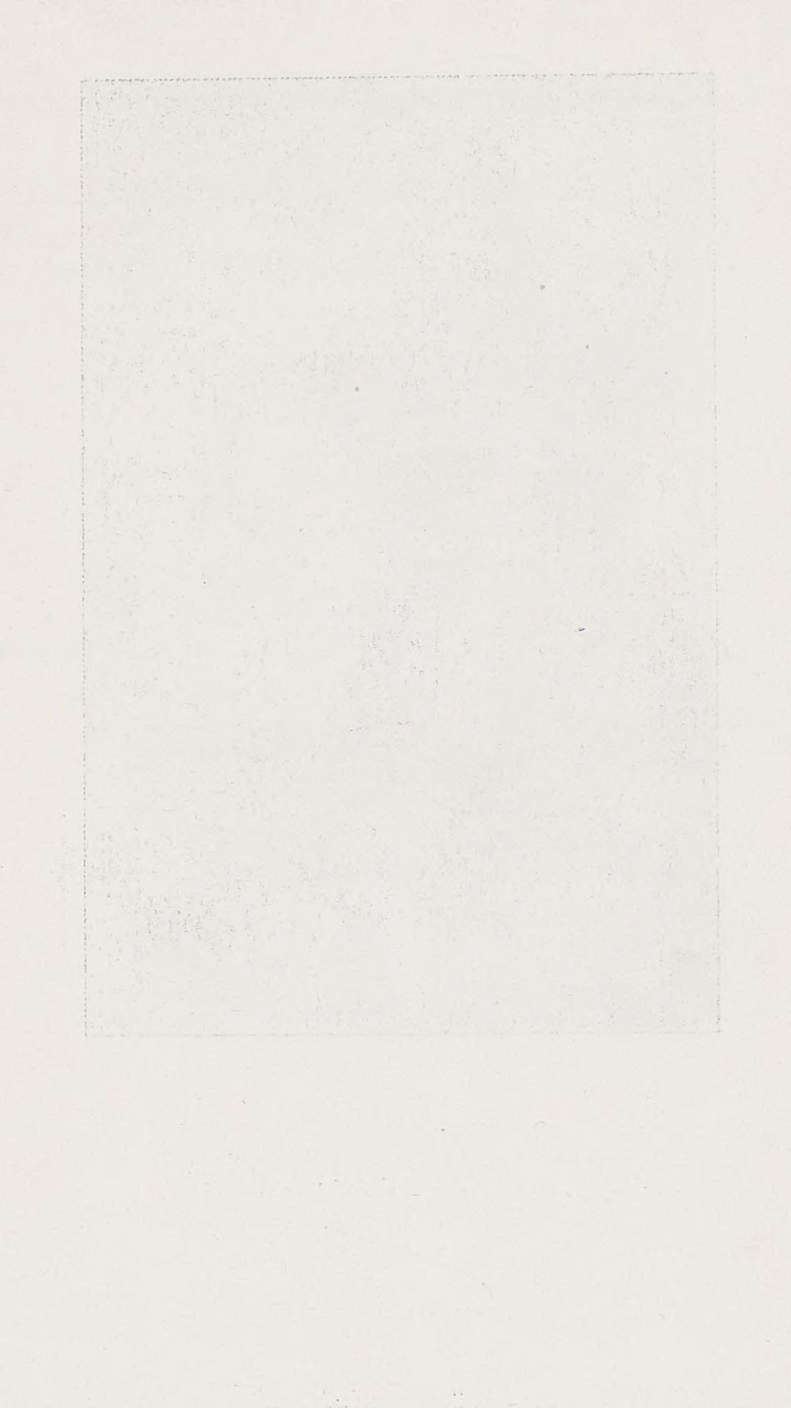
*

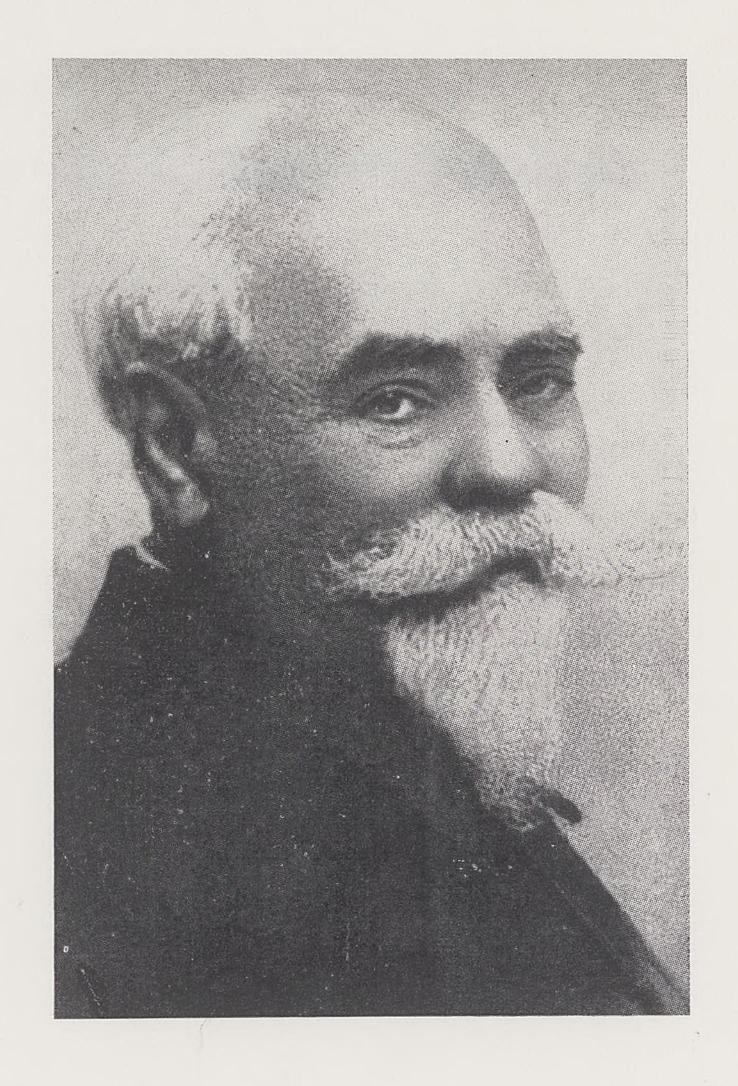
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

*

Reprodukcja fotooffsetowa, 1966

Zakład Graficzny PWN, Łódź, Gdańska 162





S. Zaremba

23. X. 1863 — 23. XI. 1942

A LA MÉMOIRE

DE

STANISŁAW ZAREMBA

ILLUSTRE GÉOMÈTRE

PREMIER ORGANISATEUR DES ÉTUDES MATHÉMATIQUES MODERNES EN POLOGNE

FONDATEUR DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

SUR LA RELATION ENTRE LE MODULE D'UN DÉTERMINANT COMPLEXE ET SON DÉTERMINANT RÉEL, ASSOCIÉ. APPLICATION À LA THÉORIE DES FORMES HERMITIENNES ET À CELLE DES MODULES DES MATRICES COMPLEXES

Par J. Szarski et T. Ważewski (Kraków)

Chaque transformation linéaire T se rapportant aux points de l'espace complexe à n dimensions, peut être interprétée comme une transformation réelle T^* des points de l'espace réel à $2n$ dimensions. Nous démontrons dans la note présente que le carré du module du déterminant de la transformation T est égal au déterminant de la transformation T^*. Cette remarque nous permet de réduire certains problèmes dans l'espace complexe aux problèmes analogues dans l'espace réel. Nous en donnons l'exemple sous la forme de deux théorèmes appartenant respectivement à la théorie des formes hermitiennes et à celle des modules des matrices complexes.

Considérons la transformation linéaire:

(1) $$y_j = a_{jk} x_k \text{ [1]} \qquad j=1,\dots,m; \; k=1,\dots,n.$$

m n'étant pas forcément égal à n, et a_{jk}, y_j, x_k étant complexes.

Désignons respectivement par $R(z)$ et $I(z)$ la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $z = R(z) + iI(z)$, et posons:

(2) $$R(y_j) = \eta_j; \quad I(y_j) = \eta'_j; \quad R(x_k) = \xi_k; \quad I(x_k) = \xi'_k.$$

---

[1]) Au lieu d'écrire $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k$, nous écrivons tout court $a_{jk} x_k$. Nous nous servirons de cette notation abrégée dans le suite.

En comparant respectivement les parties réelles et les parties imaginaires des équations (1), nous en obtenons la transformation linéaire et réelle:

$$\begin{aligned} \eta_j &= R(a_{jk})\cdot\xi_k - I(a_{jk})\cdot\xi'_k \\ \eta'_j &= I(a_{jk})\cdot\xi_k + R(a_{jk})\cdot\xi'_k. \end{aligned} \tag{3}$$

Def. 1. La matrice, à $2m$ lignes et à $2n$ colonnes, de la transformation (3) c. à d. la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} R(a_{jk}), & -I(a_{jk}) \\ I(a_{jk}), & R(a_{jk}) \end{matrix} \right\| \qquad j=1,\dots,m; \quad k=1,\dots,n. \tag{4}$$

sera appelée *associée* de celle de la transformation (1), c. à d. de la matrice, à m lignes et à n colonnes:

$$\|a_{jk}\| \qquad j=1,\dots,m; \quad k=1,\dots,n. \tag{5}$$

Notation. Si la matrice (5) est désigne par A, alors celle qui en est associée sera désignée par A^*

Supposons maintenant que $A=\|a_{jk}\|$, $B=\|b_{jk}\|$, $(j=1,\dots,m;\ k=1,\dots,n)$, soient deux matrices quelconques aux éléments complexes. En vertu de la Définition 1 on déduit, sans difficulté, les relations suivantes [2]):

α) $(A+B)^*=A^*+B^*$

β) $(k\cdot A)^* = k\cdot A^*$ (k désigne un nombre réel quelconque).

γ) $(A\cdot B')^* = A^*\cdot(B')^*$ (nous multiplions lignes par colonnes).

δ) $(A^*)' = (\bar{A}')^*$

ε) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ (pour $m=n$ et matrice A non-singulière).

Théorème 1. Supposons que, pour la matrice (5), on ait l'égalité $m=n$. Nous affirmons que, si la suite:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n. \tag{6}$$

représente la suite complète [3]) de racines caractèristiques de la matrice (5), alors la suite:

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_n, \bar{\lambda}_n \tag{7}$$

constitue la suite complète de racines caractéristiques de la matrice (4).

---

[2]) C', $\bar{C}$, C^{-1} désignent respectivement les matrices: transposée, conjuguée et inverse de la matrice C.

[3]) Chaque racine k-tuple figure dans la suite exactement k fois.

Dém.: Le polynôme caractéristique de la matrice (4) à la forme:

(8) $$w(\lambda)=\begin{vmatrix} R(a_{jk})-\delta_{jk}\lambda, & -I(a_{jk}) \\ I(a_{jk}) & , R(a_{jk})-\delta_{jk}\lambda \end{vmatrix}.$$

En multipliant par i les lignes du groupe inférieur de ce déterminant et en les ajoutant aux lignes correspondantes du groupe supérieur nous obtenons:

(9) $$w(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{jk}-\delta_{jk}\lambda, & ia_{jk}-i\delta_{jk}\lambda \\ I(a_{jk}) & , R(a_{jk})-\delta_{jk}\lambda \end{vmatrix}.$$

En multipliant, ensuite, par $-i$ les colonnes du groupe gauche du déterminant (9) et en les ajoutant aux colonnes correspondantes du groupe droit, nous obtenons:

(10) $$w(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{jk}-\delta_{jk}\lambda, & 0 \\ I(a_{jk}) & , \bar{a}_{jk}-\delta_{jk}\lambda \end{vmatrix}.$$

En vertu du théorème de Laplace, il en résulte facilement que:

(11) $$w(\lambda)=\mathrm{Det}\,(\|a_{jk}-\delta_{jk}\lambda\|)\cdot\mathrm{Det}\,(\|\bar{a}_{jk}-\delta_{jk}\lambda\|)$$ [4].

Le théorème 1 est, comme on le voit facilement, une conséquence immédiate de la relation (11).

Posons maintenant dans l'identité (11), $\lambda=0$. Nous obtenons alors:

(12) $$w(0)=\mathrm{Det}\left(\left\|\begin{matrix} R(a_{jk}), & -I(a_{jk}) \\ I(a_{jk}), & R(a_{jk}) \end{matrix}\right\|\right)=\mathrm{Det}\,(\|a_{jk}\|)\cdot\mathrm{Det}\,(\|\bar{a}_{jk}\|)=$$
$$=|\mathrm{Det}\,(\|a_{jk}\|)|^2.$$

Nous avons donc le

Théorème 2. Le carré de la valeur absolue d'un déterminant complexe est égal à son déterminant associé [5].

Considérons maintenant une matrice d'Hermite:

(13) $$\|h_{jk}\| \qquad j,k=1,\ldots,n.$$

[4]) Nous désignons par Det $(\|a_{jk}\|)$ le déterminant correspondant à la matrice $\|a_{jk}\|$.

[5]) Nous entendons par déterminant associé le déterminant qui correspond à la matrice associée.

c. à d. une matrice pour laquelle on ait:

(14) $$h_{jk}=\bar{h}_{kj}.$$

Théorème 3.

I. Si la suite:

(15) $$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$$

constitue la suite complète de racines caractéristiques de la matrice (13), alors la suite:

(16) $$\mu_1, \mu_1, \mu_2, \mu_2, \ldots, \mu_n, \mu_n$$

représente la suite complète de racines caractéristiques de la matrice associée:

(17) $$\left\| \begin{matrix} R(h_{jk}), & -I(h_{jk}) \\ I(h_{jk}), & R(h_{jk}) \end{matrix} \right\| {}^{6)}.$$

II. Le carré du polynôme caractéristique de la matrice hermitienne est égal au polynôme caractéristique de sa matrice associée.

Dém.:

I. La matrice (13) étant hermitiennes toutes ses racines caractéristiques sont, comme on le sait, réelles. En vertu du théorème 1, il en résulte la première partie du théorème 3.

II. Désignons par $w_1(\mu)$, le polynôme caractéristique de la matrice (13) et par $w_2(\mu)$, celui de sa matrice associée (17). En vertu de ce que nous venons de démontrer, nous avons:

(18) $$w_1(\mu)=(\mu_1-\mu)\ldots(\mu_n-\mu)$$

(19) $$w_2(\mu)=(\mu_1-\mu)\,(\mu_1-\mu)\ldots(\mu_n-\mu)\,(\mu_n-\mu).$$

Il en résulte que:

(20) $$w_2(\mu)=(w_1(\mu))^2$$ c. q. f. d.

Considérons, à présent, une forme d'Hermite, c. -à -d. l'expression:

(21) $$h_{jk}x_j\bar{x}_k\ {}^{7)} \qquad (j,k=1,\ldots,n)$$

[6]) Il est clair, en vertu de (14), que la matrice réelle (17) est symétrique.

[7]) Le symbole $h_{jk}x_j\bar{x}_k$ désigne la somme double $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{jk}x_j\bar{x}_k$.

où $||h_{jk}||$ est une matrice hermitienne. En vertu des relations (14), et en nous servant des notations (2), nous avons:

$$(22) \qquad h_{jk}x_j\bar{x}_k = R(h_{jk}x_j\bar{x}_k) = R(h_{jk})\,\xi_j\xi_k + R(h_{jk})\,\xi'_j\xi'_k - \\ -I(h_{jk})\,\xi'_j\xi_k + I(h_{jk})\,\xi_j\xi'_k.$$

Il en résulte que la forme d'Hermite correspondant à la matrice (13) est identique avec la forme quadratique réelle correspondant à la matrice symétrique (17).

Supposons maintenant que, pour une autre forme d'Hermite, correspondant à la matrice hermitienne $||h'_{jk}||$, on ait l'inégalité:

$$(23) \qquad h_{jk}x_j\bar{x}_k \leqslant h'_{jk}x_j\bar{x}_k$$ [8])

et que les suites:

$$(24) \qquad \begin{array}{c} \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \\ \lambda'_1 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_n \end{array}$$

représentent respectivement les suites complètes de racines caractéristiques des matrices $||h_{jk}||$ et $||h'_{jk}||$.

En vertu du théorème 3, des relations (22) et (23), et d'un théorème bien connu [9]) se rapportant aux formes quadratiques réelles, on a alors les inégalités suivantes:

$$(25) \qquad \lambda_i \leqslant \lambda_i \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Nous avons donc le

Théorème 4. Si deux formes hermitiennes correspondant respectivement aux matrices hermitiennes $||h_{jk}||$ et $||h'_{jk}||$ remplissent l'inégalité (23), alors leurs racines caractéristiques respectives (24) satisfont aux inégalités (25).

Def. 2. Par le *module* d'une matrice $||a_{jk}||$, $(j = 1, \ldots, m;$ $k = 1, \ldots, n)$ aux éléments complexes, nous entendrons l'expression suivante:

$$(26) \qquad M \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{\mathrm{Det}\,(||a_{jk}|| \cdot ||\bar{a}_{jk}||)}$$

(où nous multiplions lignes par lignes).

---

[8]) Les expressions figurant dans l'inégalité (23) sont, comme on le sait, réelles.

[9]) Courant-Hilbert: *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin 1924, p. 18.

Remarque 1. Le déterminant Det $(||a_{jk}||\cdot||\bar{a}_{jk}||)$ étant égal, en vertu du théorème de Cauchy, à la somme de certains déterminants multipliés par leurs déterminants conjugueés, l'expression sous la racine est toujours non-négative.

Remarque 2. Si $m=n$, le module de la matrice est égal à la valeur absolue de son déterminant.

Théorème 5. Si l'on désigne par M^* le module de la matrice associée de la matrice $||a_{jk}||$, alors on aura la relation suivante:

(27) $$M^*=M^2.$$

Dém.: Posons: $a_{jk}=a'_{jk}+ia''_{jk}$.

En vertu de la définition 2, nous avons:

(28) $$M=\sqrt{\mathrm{Det}\,(||a'_{rl}\cdot a'_{sl}+a''_{rl}\cdot a''_{sl}+i\,(a''_{rl}\cdot a'_{sl}-a'_{rl}\cdot a''_{sl})||)}\ ^{10)}$$

(29) $$M^*=\sqrt{\mathrm{Det}\left(\left\|\begin{matrix}a'_{jk}, & -a''_{jk}\\ a''_{jk}, & a'_{jk}\end{matrix}\right\|^2\right)}= \\ =\sqrt{\mathrm{Det}\left(\left\|\begin{matrix}a'_{rl}\cdot a'_{sl}+a''_{rl}\cdot a''_{sl}, & a'_{rl}\cdot a''_{sl}-a''_{rl}\cdot a'_{sl}\\ a''_{rl}\cdot a'_{sl}-a'_{rl}\cdot a''_{sl}, & a'_{rl}\cdot a'_{sl}+a''_{rl}\cdot a''_{sl}\end{matrix}\right\|\right)}\ (r,s=1,\ldots,m)$$

En vertu du théorème 2 nous avons l'égalité:

(30) $$|\mathrm{Det}\,(||a'_{rl}\cdot a'_{sl}+a''_{rl}\cdot a''_{sl}+i\,(a''_{rl}\cdot a'_{sl}-a'_{rl}\cdot a''_{sl})||)|^2= \\ =\mathrm{Det}\left(\left\|\begin{matrix}a'_{rl}\cdot a'_{sl}+a''_{rl}\cdot a''_{sl}, & a'_{rl}\cdot a''_{sl}-a''_{rl}\cdot a'_{sl}\\ a''_{rl}\cdot a'_{sl}-a'_{rl}\cdot a''_{sl}, & a'_{rl}\cdot a'_{sl}+a''_{rl}\cdot a''_{sl}\end{matrix}\right\|\right).$$

En rapprochant les relations (28), (29) et (30) nous obtenons la relation (27) qu'il fallait démontrer.

---

10) Le symbole $a'_{rl}\cdot a'_{sl}$ désigne la somme $\sum_{l=1}^{n} a'_{rl}\cdot a'_{sl}$. Il en est de même d'autres symboles de la forme analogue figurant dans (28) et (29).

SUR LES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION LINÉAIRE DU TYPE PARABOLIQUE DÉTERMINÉES PAR LES CONDITIONS INITIALES

Par Mirosław Krzyżański (Kraków)

Je me sens obligé de faire plusieurs rectifications et remarques concernant mon travail, qui vient de paraître dans ces Annales, t. XVIII (p. 145). Voici en quoi elles consistent.

1'. Les énoncés des théorèmes II et III (n-ros 6 et 7)[1]) sont inexacts. L'application des théorèmes de M. Gevrey exige des hypothèses supplémentaires[2]) concernant les coefficients de l'équation (1) et la fonction f. Or le procédé dont je me suis servi dans la démonstration de ces théorèmes permet de démontrer un théorème, qui met mieux en évidence la portée des méthodes appliquées.

Théorème. Nous supposons que: 1^0 les coefficients A_{ik}, a_j et c de l'équation (1) satisfont aux conditions (3), $b\equiv 1$ et f est continue, de classe E_2, 2^0 étant donnée une fonction $\Phi(x_1,x_2,...,y)$, continue dans la couche R_0 (voir 3, p. 147), il existe dans tout parallélépipède $R^{(0)}$, détaché de la couche R_0 par les hyperplans $x_i=$ const $(i=1,2,...,m)$, une solution de (1) identique à Φ pour $y=0$ et sur la surface latérale de $R^{(0)}$.

Alors, si la fonction Φ_0 de classe E_2 dans R_0 est choisie[3]) de sorte que $\Phi_0(x_1,x_2,...,x_m,0)=\varphi(x_1,x_2,...,x_m)$, la suite des solutions u_n de (1) déterminées dans les parallélépipèdes $R_n^{(0)}$

---

[1]) Les numéros des paragraphes, pages et formules qui sont cités dans la présente note, se rattachent au travail du t. XVIII.

[2]) Voir le travail cité à la page 150 (t. XVIII).

[3]) On peut poser d'ailleus $\Phi_0(x_1,x_2,...,x_m,y)\equiv\varphi(x_1,x_2,...,x_m)$.

détachés de R_0 par les hyperplans $x_i = \pm n$, telles que:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} &u_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ &u_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = \Phi_0(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) \qquad \text{sur } S_n^{(0)}, \end{aligned}$$

$S_n^{(0)}$ étant la surface latérale de $R_n^{(0)}$, est convergente pour $n \to \infty$ dans une couche $R \subset R_0$, dont la hauteur h dépend des coefficients de (1) et des fonctions f et Φ_0. La limite $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ est une solution de (1), satisfaisant à la condition (2). Elle appartient à la classe E_2.

La démonstration ne diffère point de celles des th. I et II, les conditions (9) étant remplacées cette fois par (*A*).

On peut supposer, sans restreindre la généralité du résultat, que $c > 0$, car, dans le cas contraire, on fait le changement de l'inconnue: $u = u_1 e^{\gamma_1 y}$ $(\gamma_1 > \gamma)$.

2'. Dans la définition de la fonction H (n-ro 3, p. 148) le nombre δ doit être inférieur à $\frac{1}{\mu}$. Dans les formules pour $F(H)$ manque le facteur H aux seconds membres.

3'. Supposons qu'au point $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$ on ait: $\sum\limits_{ik=1}^{m} A_{ik}\lambda_i\lambda_k = \sum\limits_{n=1}^{m}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} g_{nj}\lambda_j\Big)^2$. D'après M. Giraut (voir le travail cité à la p. 150), la fonction $u(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)$, admettant au voisinage de P les dérivées du I-er ordre continues, est une solution de l'équation (1) au sens généralisé, lorsque:

$$\mathfrak{F}(u) + f = 0,$$

avec: $\mathfrak{F}(u) = \lim\limits_{t\to 0} t^{-2}\Big\{\sum\limits_{n=1}^{m}[2u(X) - u(X'_n) - u(X''_n)] + [u(X''') - u(X)] + \sum\limits_{j=1}^{m} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu$, où X'_n, X''_n, X''' sont les points aux coordonnées égales resp. à: $x_i + g_{ni}t, y \; (i = 1, 2, \ldots, m)$; $x_i - g_{ni}t, y$; $x_i, y + bt^2$.

On peut démontrer que si dans un domaine borné D, limité par deux caractéristiques et une surface S, les coeffitients b et c sont supérieurs aux constantes positives b_0 et c_0, $f \geqslant 0$ (ou $f \leqslant 0$), et la fonction u est à l'intérieur de D une solution

de (1) au sens généralisé, elle ne peut atteindre dans D un maximum positif (resp. un minimum négatif) que sur la surface S, ou sur la caractéristique intérieure [4]).

Observons enfin que le changement de l'inconnue $u = v \cdot H$ (voir n-ros 4, 6, 7) transforme $\mathfrak{F}(u)$ en une expression avec le coefficient de v égal a $F(H)$, donc positif. Il en résulte que le théorème énoncé dans la présente note s'applique aussi aux solutions de (1) au sens généralisé.

4'. Nous avons supposé jusqu'ici que les coefficients de l'équation (1) sont bornés. On peut étendre les résultats obtenus au cas, où les coefficients a_j et c satisfont aux conditions:

$$|a_j| < \alpha \left(\sum_{s=1}^{m} |x_s| + 1\right) \quad |c| < \gamma \left(\sum_{s=1}^{m} x_s^2 + 1\right)$$ (α et γ — deux constantes positives),

A_{ik} restant encore bornés et $b \equiv 1$. En effet, il suffit de modifier le coefficient $\mu(k)$ dans l'expression pour la fonction H (voir le n-ro 3) de sorte que l'on ait encore $F(H) > 0$ [5]). A cet effet on pose: $\mu(k) = 4k\mathfrak{A} + 2\alpha + \frac{\gamma}{k} + \lambda^2$.

Les équations de cette espèce interviennent dans la théorie de la diffusion [6]).

---

[4]) Un théorème analogue pour l'equation du type elliptique et pour $c \geqslant 0$ a été démontré par M. Giraud. Voir: Bulletin des Sc. Math., 2-me s. t. LVI (1932), p. 248.

[5]) Le lemme du n-ro 5 reste valable à condition du choix convenable de la hauteur de la couche $R_{1,2}$.

[6]) M. Smoluchowski: *Über Brown'sche Molekularbewegung.* Annalen der Physik. Band 48 (1915) p. 1103—1112.

SUR LA THÉORIE DES OBJETS GÉOMÉTRIQUES

(Réduction des objets géométriques spéciaux de première classe aux objets du type Δ)

Par St. Gołąb (Kraków)

Dans le travail présent je démontre que dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions n chaque objet géométrique de première classe (selon la terminologie de MM. Schouten et Haantjes)[1]) à une et unique composante est un objet du type Δ [2]). Le problème de la détermination de tous les objets du type Δ étant déjà résolu[3]), il en est de même de la question de trouver tous les objets purs de première classe.

En ce qui concerne la terminologie, nous renvoyons le lecteur au travail cité plus haut[4]).

Etant donné dans l'espace n-dimensionel X_n un pseudogroupe[5]) de toutes les transformations:

$$\bar{\xi}_i = \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \varphi_i(\xi_k) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1}$$

telles que *les fonctions φ_i possèdent les dérivées partielles du premier ordre continues*:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_k} = a_{ik} \tag{2}$$

et telles que le jacobien

$$\Delta = |a_{ik}| \neq 0. \tag{3}$$

---

[1]) J. A. Schouten et J. Haantjes: *On the theory of the geometric object*. Proc. of the London Math. Soc. Ser. 2. Vol. 42 (1937), 356—376.

[2]) St. Gołąb: *Über die Klassifikation der geometrischen Objekte*. Mathem. Zeitschr. 44 (1938), 104—114, § 3.

[3]) l. c. [2])

[4]) l. c. [1])

[5]) St. Gołąb: *Über den Begriff der „Pseudogruppe von Transformationen"*. Mathem. Annalen 116 (1939), 768—780.

Désignons par x, resp. par $\bar{x}$, la composante d'un objet géométrique dans le système (ξ_k) resp. $(\bar{\xi}_k)$.

Nous supposons que l'objet donné est un objet géométrique spécial, pur de première classe, c'est à dire que la loi de transformation de la composante a la forme suivante:

$$\bar{x}=f(x, a_{ik})=f(x;a). \tag{4}$$

La fonction f est une fonction de $1+n^2$ variables indépendantes. La méthode que nous allons appliquer dans la suite, exige l'hypothèse supplémentaire que f *soit pourvue des dérivées partielles continues du second ordre.*

La fonction f doit satisfaire à une équation fonctionnelle itérée. Pour l'obtenir nous envisageons encore un troisième système de coordonnées $\bar{\bar{\xi}}_k$ et posons:

$$\begin{cases} \bar{\bar{\xi}}_i=\psi_i(\bar{\xi}_k) \\ \beta_{ik}=\dfrac{\partial\psi_i}{\partial\bar{\xi}_k}. \end{cases} \tag{5}$$

Nous avons d'une part:

$$\bar{\bar{x}}=f(\bar{x};\beta). \tag{6}$$

D'autre part, si nous posons:

$$\begin{cases} \psi_i[\varphi_k(\xi)]=\chi_i(\xi_k) \\ \gamma_{ik}=\dfrac{\partial\chi_i}{\partial\xi_k}, \end{cases} \tag{7}$$

nous obtenons:

$$\bar{\bar{x}}=f(x;\gamma). \tag{8}$$

Il est manifeste que (6) et (8) conduisent à la relation:

$$f\{f(x;a);\beta\}=f(x;\gamma). \tag{9}$$

Mais on a, d'après une propriété bien connue,

$$\gamma_{ik}=\frac{\partial\chi_i}{\partial\xi_k}=\sum_j\frac{\partial\psi_i}{\partial\bar{\xi}_j}\frac{\partial\bar{\xi}_j}{\partial\xi_k}=\sum_j\beta_{ij}a_{jk} \tag{10}$$

et, par conséquent, la relation (9) prend la forme explicite suivante:

$$f\{f(x,\alpha_{ik}),\beta_{ik}\}=f(x,\sum_j \beta_{ij}\alpha_{jk}). \tag{11}$$

L'équation (11) doit être remplie identiquement par tous les α_{ik} et β_{ik} pourvu que l'inégalité (3) ainsi que l'inégalité

$$\nabla=|\beta_{ik}|\neq 0 \tag{12}$$

soient vérifiées et pour tous les x appartenant à un ensemble E, dont la nature importe peu en ce moment.

Remarquons encore que la fonction f doit satisfaire à une équation supplémentaire, qui n'est pas une conséquence de l'équation (11) et qui provient du fait, qu'une transformation identique $\bar{\xi}_i=\xi_i$ $(i=1,...,n)$ ne peut pas changer la composante de l'objet. Nous avons donc:

$$x=f(x,\delta_{ik}), \tag{13}$$

où δ_{ik} est le symbole de Kronecker bien connu.

Nous désignons dans la suite par f_0 la dérivée de f par rapport à la variable x et par f_{rs} la dérivée partielle par rapport à α_{rs}:

$$f_0=\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_{rs}=\frac{\partial f}{\partial \alpha_{rs}}. \tag{14}$$

L'équation (11) admet des solutions constantes ainsi que la solution triviale $f=x$, qui ne dépend pas des variables α_{ik}. Nous exclurons dans la suite les solutions de ce genre en supposant qu'une au moins des dérivées f_{rs} soit différente de zéro:

$$f_{rs}\neq 0 \quad \text{pour un couple } (r,s) \text{ au moins.} \tag{15}$$

En différentiant l'équation (11) par rapport à α_{ik} nous obtenons:

$$f_0\{f(x;\alpha);\beta\}\cdot f_{ik}(x;\alpha)=\sum_{rs} f_{rs}(x;\gamma)\cdot\frac{\partial\gamma_{rs}}{\partial\alpha_{ik}}. \tag{16}$$

Comme

$$\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial \alpha_{ik}} = \sum_j \beta_{rj} \frac{\partial \alpha_{js}}{\partial \alpha_{ik}} = \sum_j \beta_{rj} \cdot \delta_{ji} \cdot \delta_{sk} = \beta_{ri} \delta_{sk}, \tag{17}$$

la relation (16) prend la forme:

$$f_0\{f(x;\alpha);\beta\} f_{ik}(x;\alpha) = \sum_r f_{rk}(x;\gamma)\beta_{ri}. \tag{18}$$

En posant dans (18) $\alpha_{ik}=\delta_{ik}$ et en tenant compte de (13) et de ce que

$$\gamma_{ik} = \sum_j \beta_{ij}\alpha_{jk} = \sum_j \beta_{ij}\delta_{jk} = \beta_{ik}, \tag{19}$$

nous parvenons aux relations:

$$f_0\{x;\beta\} \cdot f_{ik}(x,\delta_{ik}) = \sum_r f_{rk}(x;\beta) \cdot \beta_{ri}. \tag{20}$$

Comme les fonctions $f_{ik}(x,\delta_{ik})$ ne dépendent que de la variable x, nous pouvons poser:

$$f_{ik}(x,\delta_{ik}) = \omega_{ik}(x), \tag{21}$$

ce qui nous permet d'ecrire (20) sous une forme abrégée:

$$\sum_r \beta_{ri} \cdot f_{rk}(x;\beta) = \omega_{ik}(x) \cdot f_0(x;\beta). \tag{22}$$

Le nombre des relations précédentes est égal à n^2, car les indices i,k parcourent les valeurs $1,\dots,n$ indépendamment. Traitons (22) comme un système de n^2 équations aux dérivées partielles homogènes du premier ordre à une fonction inconnue f, en supposant pour le moment que les coefficients $\omega_{ik}(x)$ soient connus. Transformons ce système en un système équivalent de JACOBI. Cette opération peut être exécutée en résolvant le système par rapport aux dérivées f_{ik}, parce que le déterminant W des coefficients est égal, comme un calcul facile le montre, à:

$$W = |\beta_{ik}|^n = \nabla^n \neq 0. \tag{23}$$

En résolvant (22) par rapport aux $f_{ik}(x;\beta)$, nous obtenons:

$$f_{ik} = \frac{f_0}{\nabla} \sum_j B_{ij}\omega_{jk}, \tag{24}$$

où B_{ij} est le mineur algébrique de l'élément β_{ij} dans ∇. Les relations (24) peuvent être facilement vérifiées en s'appuyant sur un théorème bien connu:

$$(25) \qquad \sum_r \beta_{ri} B_{rj} = \nabla \cdot \delta_{ij}.$$

D'après notre hypothèse (15) le système (24) admet les solutions non triviales (ne se réduisant à une constante). En égalant à zéro tous les crochets de Poisson nous obtiendrons quelques conditions nécessaires pour les coefficients ω_{ik}.

En introduisant les abréviations:

$$(26) \qquad X_{ik} f = f_{ik} - \Big(\sum_r \frac{B_{ir}}{\nabla} \omega_{rk} \Big) f_0,$$

nous pourrons ecrire notre système sous la forme:

$$(27) \qquad X_{ik} f = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Prenons un couple (j, l) différent de (i, k):

$$(28) \qquad (i-j)^2 + (k-l)^2 > 0$$

et formons le crochet de Poisson:

$$(29) \qquad (X_{ik}, X_{jl}) f.$$

Dans ce but remarquons, qu'il subsistent les relations:

$$(30) \qquad \left\{ \begin{aligned} (X_{ik})_{jl} &= -\sum_r \Big(\frac{B_{ir}}{\nabla} \Big)_{jl} \cdot \omega_{rk} \cdot f_0 \\ (X_{jl})_{ik} &= -\sum_r \Big(\frac{B_{jr}}{\nabla} \Big)_{ik} \cdot \omega_{rl} \cdot f_0 \\ (X_{ik})_0 &= -\sum_r \frac{B_{ir}}{\nabla} \cdot \omega'_{rk} \cdot f_0 \\ (X_{jl})_0 &= -\sum_r \frac{B_{jr}}{\nabla} \cdot \omega'_{rl} \cdot f_0. \end{aligned} \right. \quad , \Big(\ \Big)_{jl} = \frac{\partial (\ )}{\partial \beta_{jl}}.$$

A cause de (30), nous aurons:

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} (X_{ik}, X_{jl}) f = \Big[&-\sum_r \Big(\frac{B_{jr}}{\nabla} \Big)_{ik} \cdot \omega_{rl} + \sum_r \frac{B_{ir}}{\nabla} \omega_{rk} \sum_s \frac{B_{js}}{\nabla} \omega'_{sl} + \\ &+ \sum_r \Big(\frac{B_{ir}}{\nabla} \Big)_{jl} \cdot \omega_{rk} - \sum_s \frac{B_{js}}{\nabla} \omega_{sl} \sum_r \frac{B_{ir}}{\nabla} \omega'_{rk} \Big] \cdot f_0. \end{aligned} \right.$$

Comme nous avons exclu le cas d'un scalaire, on a $f_0 \not\equiv 0$. Le cas, où E se compose de deux points seulement, c'est à dire, où notre objet représente un biscalaire étant aussi mis de côté, l'ensemble E renferme alors un intervalle E_1. On peut s'arranger de façon que dans un sous-intervalle E_0 soit satisfaite l'inégalité:

(32) $$f_0 \neq 0 \qquad \text{pour les } x \in E_0.$$

Le système (27) étant un système de JACOBI, nous en concluons que tous ses crochets de POISSON s'annulent identiquement. Si nous prenons cela en considération, nous obtenons de (31) en vertu de (32) les identités suivantes:

(33) $$\left\{\begin{aligned} &\sum_r \left(\frac{B_{ir}}{\nabla}\right)_{jl} \cdot \omega_{rk} - \sum_r \left(\frac{B_{jr}}{\nabla}\right)_{ik} \omega_{rl} + \sum_{rs} \frac{B_{ir}B_{js}}{\nabla^2} \omega_{rk}\omega'_{sl} - \\ &\quad - \sum_{rs} \frac{B_{ir}B_{js}}{\nabla^2} \omega_{sl}\omega'_{rk} \equiv 0 \qquad \text{pour } x \in E_0. \end{aligned}\right.$$

Nous avons d'après la règle de différentiation du quotient:

(34) $$\left(\frac{B_{ir}}{\nabla}\right)_{jl} = \frac{\nabla (B_{ir})_{jl} - B_{ir}(\nabla)_{jl}}{\nabla^2}.$$

La formule de différentiation des déterminants donne d'autre part:

(35) $$(\nabla)_{jl} = \frac{\partial \nabla}{\partial \beta_{jl}} = B_{jl},$$

donc:

(36) $$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{B_{ir}}{\nabla}\right)_{jl} &= \frac{(B_{ir})_{jl}}{\nabla} - \frac{B_{ir}B_{jl}}{\nabla^2} \\ \left(\frac{B_{jr}}{\nabla}\right)_{ik} &= \frac{(B_{jr})_{ik}}{\nabla} - \frac{B_{jr}B_{ik}}{\nabla^2}. \end{aligned}\right.$$

L'identité (33), multipliée par ∇^2, prend alors la forme suivante:

(37) $$\left\{\begin{aligned} &\nabla \cdot \sum_r \{(B_{ir})_{jl} \cdot \omega_{rk} - (B_{jr})_{ik} \cdot \omega_{rl}\} + \sum_r [B_{ik}B_{jr}\omega_{rl} - \\ &\quad - B_{ir}B_{jl}\omega_{rk}] + \sum_{rs} B_{ir}B_{js}(\omega_{rk}\omega'_{sl} - \omega_{sl}\omega'_{rk}) \equiv 0 \end{aligned}\right.$$

$i, k, j, l = 1, \ldots, n$ et remplissant l'inégalité (28).

Nous affirmons que l'on a:

$$(B_{ir})_{jk} = (B_{jr})_{ik}. \tag{38}$$

En effet, le premier membre de l'égalité (38) résulte de deux opérations consécutives: on supprime dans ∇ la i-ème ligne et la r-ième colonne et ensuite la j-ième ligne et la k-ième colonne. Le deuxième membre est obtenu si l'on supprime dans ∇ la j-ième ligne et r-ième colonne et puis la i-ième ligne et la k-ième colonne. Il est évident que dans chaque cas on parvient au même résultat final. Si nous tenons compte de (38) et si nous posons $l=k$ dans (37) nous obtiendrons:

$$\sum_r \omega_{rk}(B_{ik}B_{jr} - B_{ir}B_{jk}) + \sum_{rs} B_{ir}B_{js}(\omega_{rk}\omega'_{sk} - \omega_{sk}\omega'_{rk}) \equiv 0 \tag{39}$$

pour $i \neq j$, $x \in E_0$.

Les identités (39) sont satisfaites pour tous les x de l'intervalle E_0 (la variable x figure implicitement dans les coefficients ω_{ik} et $\omega'_{ik} = \dfrac{d\omega_{ik}}{dx}$) et pour toutes les valeurs de β_{ik}, qui, comme variables indépendantes, figurent dans les mineurs B. D'après un théorème de CAYLEY, nous obtiendrons les relations équivalentes si nous remplaçons partout B_{ik} par $\nabla \cdot \beta_{ik}$, ou — ce qui à cause du caractère homogène des relations (39) revient au même — par les β_{ik}. Nous aurons dans ce cas:

$$\sum_r \omega_{rk}(\beta_{ik}\beta_{jr} - \beta_{ir}\beta_{jk}) + \sum_{rs} \beta_{ir}\beta_{js}(\omega_{rk}\omega'_{sk} - \omega_{sk}\omega'_{rk}) \equiv 0. \tag{40}$$

La différentiation de l'identité (40) par rapport à β_{ik} nous donne:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_r \omega_{rk}(\beta_{jr} + \beta_{ik}\delta_{ij}\delta_{kr} - \beta_{ir}\delta_{ij}\delta_{kk} - \beta_{jk}\delta_{ii}\delta_{kr}) + \\ &+ \sum_{rs} (\omega_{rk}\omega'_{sk} - \omega_{sk}\omega'_{rk})(\beta_{js}\delta_{ii}\delta_{rk} + \beta_{ir}\delta_{ji}\delta_{sk}) \equiv 0. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Comme $i \neq j$, on a $\delta_{ij}=0$ et, par conséquent, la relation précédente se réduit à la suivante:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_r \omega_{rk}\beta_{jr} - \omega_{kk}\beta_{jk} + \sum_s (\omega_{kk}\omega'_{sk} - \omega_{sk}\omega'_{kk})\beta_{js} \equiv 0 \\ &\qquad (k, j = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Effectuons la différentiation de (42) par rapport à β_{jp}, en supposant que

(43) $$p \neq k.$$

Nous obtiendrons:

(44) $$\omega_{pk} + \omega_{kk}\omega'_{pk} - \omega_{pk}\omega'_{kk} = 0 \qquad (p \neq k).$$

Fixons pour le moment l'indice k et posons:

(45) $$\omega_{pk} = \lambda_p \qquad p \neq k.$$

Les identités (44) peuvent être écrites sous la forme:

(46) $$\lambda_p + \lambda_k \lambda'_p - \lambda_p \lambda'_k = 0 \qquad p = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n.$$

Notre but est de démontrer que l'on a dans un sous-intervalle $E^* \subset E_0$ idéntiquement:

(47) $$\lambda_p \equiv 0 \quad \text{pour} \quad p \neq k.$$

Deux cas sont à distinguer suivant que

(48 a) $\lambda_k \equiv 0$ dans E_0 ou (48 b) $\lambda_k \not\equiv 0$ dans E_0.

La possibilité $\lambda_k \equiv 0$ ou $\omega_{kk} \equiv 0$ conduirait à cause de la relation (42) à l'identité:

(49) $$\sum_r \omega_{rk}\beta_{jr} \equiv 0,$$

ce qui, en tenant compte de (12), impliquerait:

(50) $$\omega_{rk} \equiv 0 \qquad k \text{ fixe}, \ r = 1, \ldots, n.$$

(50) et (24) donnerait:

(51) $$f_{ik} \equiv 0 \qquad k \text{ fixe}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Nous allons montrer que l'hypothèse (51) impliquerait les relations

(52) $$f_{rs} \equiv 0$$

pour tous les r et s, contrairement à (15).

Soit, en effet, (r, s) un couple quelconque de nombres entiers de 1 à n tels, que $s \neq k$. Nous avons:

(53) $$\gamma_{rs} = \sum_j \beta_{rj} a_{js} = \beta_{rk} a_{ks} + \sum_{j \neq k} \beta_{rj} \cdot a_{js}.$$

Nous posons dans la suite:

$$(54)\qquad \begin{cases} \beta_{rk} = t \\ \beta_{ik} = 0 \text{ pour les } i \neq r \\ \alpha_{ks} = \alpha_0 \neq 0 \\ \alpha_{kj} = 0 \text{ pour les } j \neq s. \end{cases}$$

Fixons toutes les valeurs de γ_{ij} $(j \neq k)$ à l'exception de l'élément γ_{rs} et considérons le système:

$$(55)\qquad \sum_m \beta_{lm}\alpha_{mj} = \gamma_{ij} \qquad \begin{matrix} j \neq k \\ (i,j) \neq (r,s) \end{matrix}$$

comme un système d'équations aux inconnues β et α. Il y a $n^2 - n - 1$ d'équations. Le nombre des inconnues est égal à

$$(56)\qquad (n^2 - n) + n^2 - (n-1) - (n-2) = 2n^2 - 3n + 3,$$

car les quantités α_{ik} ne figurent pas dans le système (55), les $(n-1)$ valeurs de β_{ik} sont dejà déterminées par (54) et les $(n-2)$ valeurs de α_{kj} $(j \neq s,\ j \neq k)$ le sont également par les formules (54).

Comme la différence

$$(57)\qquad 2n^2 - 3n + 3 - (n^2 - n - 1) = (n-1)^2 + 3$$

est positive, il est toujours possible de trouver les solutions du système (55) remplissant en outre les conditions supplémentaires:

$$(58)\qquad \Delta \neq 0, \quad \nabla \neq 0.$$

Soit $\overset{0}{\alpha}_{ij}$ et $\overset{0}{\beta}_{ij}$ une de telles solutions. En introduisant ces valeurs dans l'équation (11) et en tenant compte du fait que la fonction f ne dépend pas en vertu de (51) des variables α_{ik}, nous obtiendrons:

$$(59)\qquad f\{f(x, \overset{0}{\alpha}_{ij}), \overset{0}{\beta}_{ij}\} \equiv f[\dot{x}, \gamma_{ij}].$$

Remarquons maintenant que l'élément γ_{rs} dans le deuxième membre de l'équation (59) est de la forme:

$$(60)\qquad \gamma_{rs} = \alpha_0 \cdot t + \sum_{j \neq k} \overset{0}{\beta}_{rj} \cdot \overset{0}{\alpha}_{js}$$

et que t ne figure dans aucun autre élément γ_{ij} à cause des

relations (54). Comme les valeurs de γ_{ij} sont fixées d'une manière arbitraire, il s'ensuit de l'identité (59) (l'identité considérée par rapport à t et x) que la fonction f ne dépend pas de la variable a_{rs}. Nous somme ainsi conduits à (52). Le couple (r,s) étant choisi arbitrairement, nous sommes ainsi conduits à la contradiction avec (15). La première des éventualités (48) ne peut pas donc avoir lieu. Il s'ensuit qu'il existe un intervalle E_0^*, sous-intervalle de E_0, tel qu'on a

(61) $$\lambda_k \neq 0 \quad \text{dans} \quad E_0^*.$$

Dans ce cas les relations (46) peuvent être transcrites sous la forme équivalente:

(62) $$= \lambda_p \cdot \frac{\lambda_\varkappa' - 1}{\lambda_\varkappa} \qquad p = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n.$$

En intégrant les équations ci-dessus nous obtenons:

(63) $$\lambda_p = C_p \cdot \mu_k(x) \qquad p \neq k$$

où nous avons posé pour abréger:

(64) $$\mu_k(x) = e^{\int \frac{\lambda_k' - 1}{\lambda_k} dx}$$

En tenant compte de (64), les relations (44) prendront la forme suivante:

(65) $$\omega_{pk} = C_{pk} \cdot \mu_k(x) \qquad p \neq k,\ C_{pk} \text{ constantes.}$$

Pour avancer le raisonnement plus loin, retournons aux relations (37) en y posant

(66) $$j = i, \quad l \neq k.$$

Nous obtiendrons alors:

(67) $$(B_{ir})_{il} = 0, \quad (B_{ir})_{ik} = 0,$$

parce que le mineur B_{ir} ne contient ni l'élément β_{il} ni l'élément β_{ik}. A cause de (67) les relations (37) prendront dans ce cas la forme suivante:

(68) $$\sum_r (B_{ik} B_{ir} \omega_{rl} - B_{ir} B_{il} \omega_{rk}) + \sum_{rs} B_{ir} B_{is} (\omega_{rk} \omega_{sl}' - \omega_{sl} \omega_{rk}') \equiv 0.$$

Comme auparavant, nous passons des relations (68) aux relations équivalentes:

$$(69)\qquad \sum_r (\beta_{ik}\beta_{ir}\omega_{rl}-\beta_{ir}\beta_{il}\omega_{rk})+\sum_{rs}\beta_{ir}\beta_{is}(\omega_{rk}\omega'_{sl}-\omega_{sl}\omega'_{rk})\equiv 0.$$

La différentiation des équations (69) par rapport à β_{ik} nous fournit:

$$(70)\qquad \begin{aligned}&\sum_r (\beta_{ir}\omega_{rl}+\beta_{ik}\delta_{kr}\omega_{rl}-\beta_{il}\delta_{kr}\omega_{rk})+\\ &\qquad+\sum_{rs}(\omega_{rk}\omega'_{sl}-\omega_{sl}\omega'_{rk})(\beta_{ir}\delta_{ks}+\beta_{is}\delta_{kr})\equiv 0\end{aligned}$$

ou, après la réduction,

$$(71)\qquad \begin{aligned}&\sum_r \beta_{ir}\omega_{rl}+\beta_{ik}\omega_{kl}-\beta_{il}\omega_{kk}+\sum_r \beta_{ir}(\omega_{rk}\omega'_{kl}-\omega_{kl}\omega'_{rk})+\\ &\qquad+\sum_r \beta_{is}(\omega_{kk}\omega'_{sl}-\omega_{sl}\omega'_{kk})\equiv 0.\end{aligned}$$

En différentiant les dernières équations par rapport à β_{il}, nous obtenons:

$$(72)\qquad \omega_{ll}-\omega_{kk}+\omega_{lk}\omega'_{kl}-\omega_{kl}\omega'_{lk}+\omega_{kk}\omega'_{ll}-\omega_{ll}\omega'_{kk}\equiv 0.$$

Remarquons maintenant qu'on peut établir d'une façon tout à fait analogue qu'auparavant les inégalités suivantes:

$$(73)\qquad \lambda_j(x)=\omega_{jj}(x)\neq 0 \quad \text{pour } j=1,\dots,n \quad \text{dans } E_0^{**},$$

E_0^{**} étant un sous-intervalle de E_0^*. Les formules (65) ont donc lieu pour tous les couples (p,k) tels que $p\neq k$. Les relations (72) peuvent être transcrites de façon suivante:

$$(74)\qquad A_{kl}+\omega_{lk}\omega'_{kl}-\omega_{kl}\omega'_{lk}=0 \qquad k\neq l,$$

où nous avons posé pour abréger:

$$(75)\qquad A_{kl}=\lambda_l-\lambda_k+\lambda_k\lambda'_l-\lambda_l\lambda'_k.$$

En tenant compte des formules (64), (65) et (75) nous pouvons écrire:

$$(76)\qquad \left\{\begin{aligned}\omega_{lk}\omega'_{kl}-\omega_{kl}\omega'_{lk}&=C_{lk}C_{kl}\mu_k\mu_l\left\{\frac{\lambda'_l-1}{\lambda_l}-\frac{\lambda'_k-1}{\lambda_k}\right\}\\ &=C_{lk}C_{kl}\mu_k\mu_l\frac{A_{kl}}{\lambda_k\lambda_l}.\end{aligned}\right.$$

Les relations (74) et (76) donnent:

$$(77)\qquad A_{kl}\{\lambda_k\lambda_l+C_{lk}\mu_k C_{kl}\mu_l\}=0 \qquad \text{pour } k\neq l.$$

Pour démontrer qu'on a

(78) $$A_{kl}=0$$

différentions l'équation (71) par rapport à β_{ik}. En effectuant cette différentiation nous obtenons le résultat

(79) $$2(\omega_{kl}+\omega_{kk}\omega'_{kl}-\omega'_{kk}\omega_{kl})=0,$$

ce qui donne, d'après les formules (64) et (65),

(80) $$C_{kl}\mu_l\left\{1+\lambda_k\frac{\lambda'_l-1}{\lambda_l}-\lambda'_k\right\}=0,$$

ou encore, d'après la notation abrégée (75),

(81) $$C_{kl}\mu_l\cdot A_{kl}=0.$$

μ_l étant positif nous en tirons:

(82) $$C_{kl}=0 \quad \text{ou} \quad A_{kl}=0.$$

Mais la prémière éventualité $C_{kl}=0$ donne en vertu de (77) et de (73) la relation (78).

En tenant compte de (78), nous obtenons d'après un calcul facile:

(83) $$\omega_{rk}\omega'_{sl}-\omega'_{rk}\omega_{sl}=C_{rk}C_{sl}\mu_k\mu_l\frac{A_{kl}}{\lambda_l\lambda_l}=0 \qquad \begin{pmatrix} r\neq k\\ s\neq l\end{pmatrix}$$

et

(84) $$\lambda_k\omega'_{sl}-\lambda'_k\omega_{sl}=C_{sl}\cdot\frac{\mu_l}{\lambda_l}(A_{kl}-\lambda_l)=-C_{sl}\mu_l=-\omega_{sl} \qquad (s\neq l).$$

Les relations (78), (83) et (84) nous permettent maintenant de faire la conclusion suivante. Revenons aux relations (37). En séparant les sommes en parties, on obtient

(85) $$\left\{\begin{aligned} &V\cdot\sum_r\{(B_{ir})_{jl}\cdot\omega_{rk}-(B_{jr})_{ik}\cdot\omega_{rl}\}+\underline{B_{ik}B_{jl}(\lambda_l-\lambda_k)}\\ &+\sum_{s\neq l}\underline{\underline{B_{ik}B_{js}\omega_{sl}}}-\sum_{r\neq k}\underline{\underline{B_{ir}B_{jl}\omega_{rk}}}+\underline{B_{ik}B_{jl}(\lambda_k\lambda'_l-\lambda_l\lambda'_k)}\\ &+\sum_{r\neq k}\underline{\underline{B_{ir}B_{jl}(\omega_{rk}\lambda'_l-\omega'_{rk}\lambda_l)}}+\sum_{s\neq l}\underline{\underline{B_{ik}B_{js}(\lambda_k\omega'_{sl}-\lambda'_k\omega_{sl})}}\\ &+\sum_{\substack{r\neq k\\ s\neq l}}B_{ir}B_{js}(\omega_{rk}\omega'_{sl}-\omega'_{rk}\omega_{sl})=0\end{aligned}\right.$$

$$i\neq j \quad \text{ou} \quad k\neq l.$$

L'expression soulignée en zigzag est égale à zéro en vertu de (83). Les termes soulignés une fois s'annulent à cause de (78) et les termes soulignés deux fois et trois fois respectivement s'annulent grâce à la relation (84). Il nous reste la première somme qui, divisée par ∇ et décomposée en deux sommes partielles, prend la forme:

$$(86) \qquad \sum_r (B_{ir})_{jl} \cdot \omega_{rk} = \sum_r (B_{jr})_{ik} \cdot \omega_{rl} \qquad \begin{matrix} i \neq j \text{ ou} \\ k \neq l. \end{matrix}$$

Supposons en particulier $i \neq j$ et $k \neq l$.

Prenons dans la somme du premier membre de (86) le terme correspondant à l'indice r diffiérent de k. Dans chaque terme du déterminant $(B_{ir})_{jl}$ apparait un (et un seul) élément de la k-ième colonne du déterminant ∇. D'autre part le déterminant $(B_{jr})_{ik}$, qui résulte justement du déterminant ∇ par élimination de la k-ième colonne, ne contient aucun élément de la k-ième colonne. Il en résultent les identités suivantes:

$$(87) \qquad \omega_{rk} \equiv 0 \quad \text{pour} \quad r \neq k.$$

On démontre d'une manière tout à fait analogue qu'on a $\omega_{rl} \equiv 0$ pour $r \neq l$. L'identité (86) se réduit donc à la relation:

$$(88) \qquad (B_{ik})_{jl} \cdot \lambda_k = (B_{jl})_{ik} \cdot \lambda_l \qquad i \neq j, \ k \neq l.$$

Comme $(B_{ik})_{jl} = (B_{jl})_{ik}$, la dernière relation se transforme comme suit:

$$(89) \qquad (B_{ik})_{jl} \cdot (\lambda_k - \lambda_l) = 0.$$

Si pour les k et l fixes $(B_{ik})_{jl} = 0$ pour tous les i, j $(i \neq j)$, cela montrerait que la matrice obtenue de ∇ par la suppression de la k-ième et de la l-ième colonne devrait être d'un ordre inférieure à $(n-2)$, ce qui contrédirait à l'hypothèse $\nabla \neq 0$. On a, par conséquent:

$$(90) \qquad \lambda_k = \lambda_l.$$

Les relations (87) et (90) nous permettent d'écrire, d'après les résultats précédents,

$$(91) \qquad \omega_{ik}(x) = \delta_{ik} \cdot \omega(x),$$

où $\omega(x)$ représente une fonction différente de zéro:

(92) $$\omega(x) \neq 0 \quad \text{dans} \quad E_0^{**}.$$

Le système (27) prend alors la forme définitive:

(93) $$\boxed{f_{ik} - \frac{B_{ik}}{\nabla}\,\omega(x)\cdot f_0 = 0} \qquad (i,k=1,\ldots,n).$$

Le raisonnement précédent est en défaut — comme un lecteur attentif l'a remarqué — dans le cas $n=2$. Dans ce cas l'expression $(B_{ir})_{jl}$ ne peut pas être envisagée comme le mineur provenant de ∇ par la suppression de la i-ème et j-ième ligne et de la r-ième et l-ième colonne.

Dans le cas $n=2$ le raisonnement serait comme suit. Un calcul facile nous montre que

(94) $$\begin{cases} (B_{11})_{22} = (B_{22})_{11} = 1, \ (B_{12})_{21} = (B_{21})_{12} = -1, \\ \text{tous les autres } (B_{ir})_{jl} = 0. \end{cases}$$

Le système (27) prend alors la forme:

(95) $$\begin{cases} f_{11} = \dfrac{f_0}{\nabla}(\beta_{22}\omega_{11} - \beta_{21}\omega_{21}) \\ f_{12} = \dfrac{f_0}{\nabla}(\beta_{22}\omega_{12} - \beta_{21}\omega_{22}) \\ f_{21} = \dfrac{f_0}{\nabla}(\beta_{11}\omega_{21} - \beta_{12}\omega_{11}) \\ f_{22} = \dfrac{f_0}{\nabla}(\beta_{11}\omega_{22} - \beta_{12}\omega_{12}). \end{cases}$$

Les (six) crochets de Poisson possèdent une structure très compliquée et il est intéressant de remarquer qu'il est plus avantageux de ne pas traiter le système de Jacobi (95), mais de prendre comme point de départ le système primitif:

(96) $$\begin{cases} X_1 f = \omega_{11} f_0 - \beta_{11} f_{11} - \beta_{21} f_{21} = 0 \\ X_2 f = \omega_{12} f_0 - \beta_{11} f_{12} - \beta_{21} f_{22} = 0 \\ X_3 f = \omega_{21} f_0 - \beta_{12} f_{11} - \beta_{22} f_{21} = 0 \\ X_4 f = \omega_{22} f_0 - \beta_{12} f_{12} - \beta_{22} f_{22} = 0. \end{cases}$$

Les crochets de Poisson pour ce système se laissent calculer d'une manière relativement simple:

$$(97)\quad \begin{cases} (X_1,X_2)f=(\omega_{11}\omega'_{12}-\omega_{12}\omega'_{11})f_0+\beta_{11}f_{12}+\beta_{21}f_{22}\\ (X_1,X_3)f=(\omega_{11}\omega'_{21}-\omega_{21}\omega'_{11})f_0+\beta_{12}f_{11}+\beta_{22}f_{21}\\ (X_1,X_4)f=(\omega_{11}\omega'_{22}-\omega_{22}\omega'_{11})f_0\\ (X_2,X_3)f=(\omega_{12}\omega'_{21}-\omega_{21}\omega'_{12})f_0+\beta_{11}f_{11}+\beta_{21}f_{21}-\beta_{12}f_{12}-\beta_{22}f_{22}\\ (X_2,X_4)f=(\omega_{12}\omega'_{22}-\omega_{22}\omega'_{12})f_0+\beta_{11}f_{12}+\beta_{21}f_{22}\\ (X_3,X_4)f=(\omega_{21}\omega'_{22}-\omega_{22}\omega'_{21})f_0+\beta_{12}f_{11}+\beta_{22}f_{21}. \end{cases}$$

Comme le système (96) est un système complet, tous les crochets précédents sont des combinaisons linéaires des expressions X_1f, X_2f, X_3f, X_4f. Nous avons en effet:

$$(98)\quad \begin{cases} (X_1,X_2)f=-X_2f\\ (X_1,X_3)f=-X_3f\\ (X_1,X_4)f=0\\ (X_2,X_3)f=-X_1f+X_4f\\ (X_2,X_4)f=-X_2f\\ (X_3,X_4)f=-X_3f. \end{cases}$$

La comparaison des coefficients correspondants nous fournit les six relations pour les ω_{ik}:

$$(99)\quad \begin{cases} \omega_{11}\omega'_{12}-\omega_{12}\omega'_{11}=-\omega_{12}\\ \omega_{11}\omega'_{21}-\omega_{21}\omega'_{11}=-\omega_{21}\\ \omega_{11}\omega'_{22}-\omega_{22}\omega'_{11}=0\\ \omega_{12}\omega'_{21}-\omega_{21}\omega'_{12}=\omega_{22}-\omega_{11}\\ \omega_{12}\omega'_{22}-\omega_{22}\omega'_{12}=-\omega_{12}\\ \omega_{21}\omega'_{22}-\omega_{22}\omega'_{21}=-\omega_{21}. \end{cases}$$

Parmi ces relations il n'y a que quatre qui sont indépendantes. On établit sans peine que les deux dernières ne sont en réalité que les conséquences des quatre premières.

Nous envisagerons tout d'abord la troisième relation. Nous en déduisons:

$$(100)\qquad \omega_{22}=a\cdot\omega_{11},\quad \text{où } a \text{ est une constante.}$$

En introduisant cette relation dans la cinquième et la sixième de ces équations nous obtenons:

$$(101)\quad \begin{cases} a(\omega_{12}\omega'_{11}-\omega_{11}\omega'_{12})=-\omega_{12}\\ a(\omega_{21}\omega'_{11}-\omega_{11}\omega'_{21})=-\omega_{21}, \end{cases}$$

ce qui, confronté avec la première et la deuxième équation, nous donne:

(102) $$\begin{cases}\omega_{12}(a+1)=0\\ \omega_{21}(a+1)=0.\end{cases}$$

Deux cas sont à distinguer dans la suite. On bien on a

(103) $$a=-1,$$

ou bien

(104) $$\omega_{12}\equiv\omega_{21}\equiv 0.$$

Supposons le (103). Il s'ensuit $\omega_{22}=-\omega_{11}$ et la quatrième équation fournit

(105) $$\omega_{12}\omega_{21}'-\omega_{21}\omega_{12}'=-2\omega_{11}.$$

Multiplions la première équation par ω_{21}', la deuxième par $-\omega_{12}'$ et ajoutons les membre à membre:

(106) $$\omega_{21}\omega_{12}'\omega_{11}'-\omega_{12}\omega_{21}'\omega_{11}'=\omega_{21}\omega_{12}'-\omega_{12}\omega_{21}'$$

ou

(107) $$(\omega_{11}\omega_{12}'-\omega_{12}\omega_{21}')(1-\omega_{11}')=0.$$

De là nous tirons à cause de (105):

(108) $$\omega_{11}(1-\omega_{11}')=0.$$

Ici se présentent de nouveau deux cas à distinguer:

(109) $$\omega_{11}=0,$$

ou bien

(110) $$\omega_{11}'=1.$$

Envisageons succesivement chacune de ces eventualités. Le cas (109) donne avec (105):

(111) $$\omega_{21}=b\omega_{12},\quad b \text{ est une constante.}$$

Mais la première des équations (99) fournit $\omega_{12}=0$, donc $\omega_{21}=0$ et (100) implique $\omega_{22}=0$, d'où tous les $\omega_{ik}=0$, ce qui est impossible, car dans ce cas notre objet ne serait pas un objet de première classe. La possibilité (110) implique $\omega_{11}=x+c$. Dans ce cas $\omega_{22}=-x-c$ et la première des équations (99)

conduit à $(x+c)\omega'_{12}-\omega_{12}=-\omega_{12}$ ou à

(112) $$(x+c)\omega'_{12}=0$$

d'où $\omega'_{12}=0$; la deuxième équation donne $\omega'_{21}=0$, ce qui en tenant compte de (105) impliquerait l'identité impossible (109). L'eventualité (103) conduit dans tous les cas à la contradiction. Il nous reste (104). Ceci donne avec la quatrième équation (99):

(113) $$\omega_{22}=\omega_{11}$$

et, par conséquent, nous avons — comme dans le cas $n\geqslant 3$ —

(114) $$\omega_{ik}=\delta_{ik}\omega(x) \qquad \omega(x)\neq 0.$$

Retournons au système (93) valable maintenant pour tous les $n\geqslant 2$. Fixons les indices i,k et envisageons le système correspondant des équations ordinaires écrit sous la forme incorrecte, mais ordinairement employée:

(115) $$\frac{d\beta_{jl}}{0}=\frac{d\beta_{ik}}{1}=-\frac{\nabla\, dx}{\omega(x)B_{ik}} \qquad j\neq i \text{ ou } l\neq k.$$

Le deuxième et le troisième membre nous donnent:

(116) $$\int\frac{B_{ik}}{\nabla}\,d\beta_{ik}=-\int\frac{dx}{\omega(x)}.$$

En tenant compte de

(117) $$\frac{\partial\nabla}{\partial\beta_{ik}}=B_{ik}$$

nous en tirons:

(118) $$\int\frac{d\nabla}{\nabla}=-\int\frac{dx}{\omega(x)}$$

ou

(119) $$\nabla=C\cdot e^{-\int\frac{dx}{\omega(x)}}$$

Il suit de (119) que la fonction

(120) $$\varphi(x,\nabla)=\nabla\cdot e^{\int\frac{dx}{\omega(x)}}$$

représente l'intégrale première de l'équation

$$(121) \qquad \frac{d\beta_{ik}}{dx} = -\frac{\nabla}{\omega(x) B_{ik}}.$$

Comme (120) ne dépend pas des indices i, k, (120) est une solution commune pour le système (93). Mais (93) est un système de JACOBI à n^2 équations pour la fonction de n^2+1 variables indépendantes; il possède alors une seule et unique intégrale indépendante et la solution générale est une fonction F arbitraire (inversible) de cette intégrale. Nous avons donc

$$(122) \qquad f(x;\beta) = F\left(\nabla \cdot e^{\int \frac{dx}{\omega(x)}}\right) = G(x, \nabla).$$

La formule (122) subsiste pour les x de l'intervalle E_0^{**}. Il nous reste a montrer, que la formule (122) peut être étendue sur tous les x.

Il résulte de nos dernières recherches [6]) que l'ensemble E est un intervalle ouvert (fini ou infini) ou se compose de deux intervalles ouverts. Dans le premier cas on établit par des considérations s'appyant sur la continuité de la fonction G que la validité de la formule (122) peut être étendue sur l'ensemble E tout entier. Dans le second cas on a $E = E_1 + E_2$ et

$$(123) \qquad f(x;\beta) = \begin{cases} G_1(x,\nabla) \text{ pour } x \in E_1 \text{ et } \nabla > 0 \\ G_2(x,\nabla) \text{ pour } x \in E_2 \text{ et } \nabla > 0 \\ G_3(x,\nabla) \text{ pour } x \in E_1 \text{ et } \nabla < 0 \\ G_4(x,\nabla) \text{ pour } x \in F_2 \text{ et } \nabla < 0 \end{cases}$$

et dans ce cas on démontre qu'il existe une fonction $F^*(u)$ définie pour tous les $u \neq 0$, inversible dans son domaine d'existence, monotone au sens stricte pour les $u > 0$ ainsi que pour les $u < 0$ et telle que

$$(124) \qquad f(x;\beta) = F^*(\nabla \cdot \varphi^*(x))$$

où φ^* est la fonction inverse de la fonction F^*.

Dans tous les cas notre objet se réduit à l'objet du type Δ, ce que nous voulions établir.

---

[6]) l. c. [2]).

CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES QUI DÉTERMINENT LES ESPACES EINSTEINIENS, CONFORMÉMENT EUCLIDIENS ET DE COURBURE CONSTANTE

Par W. Wrona (Kraków)

Introduction

Le calcul tensoriel et le calcul différentiel absolu dont les origines remontent aux travaux de Gauss, Riemann, Christoffel et Ricci commencent à eveiller un plus grand intérêt et atteignent un dégré de développement exceptionnel grâce à la théorie générale de relativité pour laquelle ils présentent un appareil calculateur indispensable. Ces calculs conduisent aux relations et équations qui ont un caractère invariant, c'est à dire indépendant du choix du système de coordonnées dans un groupe des transformations envisagé en exprimant, par conséquent, les lois qui régissent la géometrie. Dans les équations tensorielles chacun des indices courants $\lambda, \mu, ...; \lambda', \mu', ...;$ peut être remplacé par l'indice déterminé pris des suites $1, 2, ..., n;\ 1', 2', ..., n';$ de cette manière, des relations générales nous obtenons immédiatement les relations entre les composantes des grandeurs envisagées dans un système de coordonnées déterminé. Ce fait donne l'avantage au calcul tensoriel sur les autres méthodes d'analyse directe.

Nous avons à l'heure qu'il est beaucoup d'ouvrages qui initient aux méthodes du calcul tensoriel à n'en parler que de ceux de Levi—Civita, Eisenhart, Eddington, Szirokow, Hlavatý et d'autres. Sous une forme perfectionnée il fût exposé dans l'ouvrage de Schouten et Struik intitulé „Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeomerie" (Nordhoff, Groningen, B. I. 1935, B. II. 1938).

Dans le travail présent nous allons nous servir des symboles dont se sert Schouten dans son ouvrage. Dans le premier cha-

pitre nous donnons un aperçu abrégé des conceptions et des formules de la géométrie rimannienne à „n” dimensions. Nous nous bornons aux explications des notions et de leurs propriétés qui seront indispensables pour notre travail.

Afin d'abréger ces considérations préliminaires, les définitions des certaines notions sont données sous une forme différente de celle qu'il est d'usage de donner habituellement. L'essentiel de ces notions n'en est pas altéré. Nous n'avons que facilité l'application de ces notions aux considérations ultérieures. Le but de ce chapitre est celui de familiariser le lecteur qui n'a pas étudie le travail cité de Schouten-Struik avec les symboles dont nous nous servirons dans la suite. La théorie de la relativité a mis au premier plan l'étude de ces espaces particuliers de Riemann dans lesquels régit la loi de gravitation formulée par Einstein et qui ont reçu le nom des *éspaces einsteiniens*. Un cas particulier des espaces einsteiniens sont les éspaces *à courbure constante* de la géométrie non euclidienne et qui ont donné l'essor aux recherches de la géométrie moderne. Les chapitres II et III expliquent précisément les particularités de la courbure scalaire de la m-direction des *espaces einsteiniens* et *conformément-euclidiens*. Le chapitre IV contient les considérations analogues pour les espaces à *courbure constante* en présentant les résultats sous forme de généralisation de la proposition de F. Schur. Dans tous ces cas les espaces à quatre dimensions furent traités d'une manière particulièrement soignée à cause du rôle que jouent ces éspaces dans la théorie de la relativité.

Je tiens à exprimer ici ma grande reconnaissance au Prof. Dr. J. Haantjes, sous la direction de qui j'ai fait connaissance des méthodes de la géometrie différentielle moderne et obtenu une grande partie des résultats de ce travail.

J'exprime également ma grande reconnaissance au professeur Dr. St. Gołąb et au prof. Dr. Ważewski qui se donnèrent la peine de faire une revision approfondie du manuscrit et qui me fîrent connaitre leurs indications précieuses dont je tis usage dans la rédaction définitive de l'ouvrage présent. Je remercie aussi M. le professeur T. Banachiewicz qui me donna la possibilité de travailler dans la bibliotheque Jagiello-

nienne pendant l'occupation allemande au risque d'attirer sur lui les pires répresailles de la part des autorités d'occupation.

Chapitre 1

Aperçu des notions et des formules fondamentales de la géométrie riemannienne

§ 1. Les grandeurs dans X_n.

L'ensemble de toutes les suites $\xi^1, \xi^2 \dots \xi^n$ de n nombres réels arbitraires est appelé *l'espace arithmétique* à n dimensions et chacune de ces suites — *un point* de cet espace. Si $\mathring{\xi}^1, \mathring{\xi}^2, \dots \mathring{\xi}^n$ est un certain point de l'espace arithmétique, l'ensemble de tous les points pour lesquels valent les inégalités:

$$|\xi^\nu - \mathring{\xi}^\nu| < \delta$$

sera dit le voisinage de se point.

Si un ensemble de points de l'espace arithmétique est tel que chacun d'eux possède au moins un voisinage contenu dans cet ensemble, nous dirons que cet ensemble est le *domaine arithmétique*.

Nous admettons l'existence de l'espace topologique à n dimensions que nous appellerons dans la suite *géométrique*. Si nous pouvons établir une corespondance bi-univoque continue entre les points d'un certain domaine arithmétique D_a et les points d'une partie D_g de l'espace géométrique, nous nommerons D_g *domaine géométrique*. Cette correspondance bi-univoque sera dite *systeme de coordonnées* dans D_g et l'ensemble de n nombres $\xi^\lambda (\lambda = 1, 2, \dots, n)$ — correspondant à chaque point du domaine D_g — les *coordonnées* de ce point dans le système de coordonnées (λ).

Si nous trouvons une correspondance analogue entre les points D_g et les points d'un autre domaine arithmétique D'_a, une transformation ponctuelle continue et reversible du domaine D_a en D'_a sera en même temps une transformation du système de coordonnées dans D_g.

Désignons par $\xi^{\lambda'} (\lambda' = 1', 2', \dots, n')$ les coordonnées dans le nouveau système (λ') d'un point du domaine D_g dont les coordonnées dans l'ancien système (λ) furent les nombres $\xi^\lambda (\lambda = 1, 2, \dots, n)$. Nous ne considérons dans la suite que les

transformations du système de coordonnées qui sont données par n fonctions réelles indépendantes continues

$$\xi^{\lambda'} = \xi^{\lambda'}(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n); \qquad (\lambda' = 1', 2', \dots, n'), \tag{1.1}$$

ayant dans un domaine D_a les dérivées partielles continues d'ordre u. Le domaine D_a sera appelé — champs de transformation et le domaine D'_a — l'ensemble des valeurs de la transformation.

Si nous posons

$$A_\lambda^{\lambda'} = \frac{\partial \xi^{\lambda'}}{\partial \xi^\lambda} = \partial_\lambda \xi^{\lambda'}, \tag{1.2}$$

le jacobien de la transformation (1.1) — le déterminant

$$\Delta = |A_\lambda^{\lambda'}| \tag{1.3}$$

sera différent de zero dans le domaine D_a. La représentation de D_a dans D'_a étant bi-univoque, il existera un système de n fonctions $\xi^\lambda(\xi^{1'}, \xi^{2'}, \dots \xi^{n'})$ inverses du système (1.1), continues possédant les derivées partielles continues d'ordre u et le jacobien

$$|A_{\lambda'}^{\lambda}| = \left|\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \xi^{\lambda'}}\right| = \Delta^{-1} \neq 0.$$

L'ensemble des toutes les transformations remplissant les conditions ci-dessus dans un domaine quelconque D_a correspondant à cette transformation forme un *pseudo-groupe*. Cela signifie que le produit de deux transformations arbitraires de cet ensemble n'appartient à celui-ci que si le produit de l'ensemble des valeurs de la première transformation et du champs de la seconde transformation est un ensemble non vide.

Nous appellerons l'espace X_n de la classe u un espace géometrique à n dimensions possédant dans un domaine un système des coordonnées que nous pouvons transformer arbitrairement au moyen des transformations appartenant au pseudo-groupe ci-dessus. Nous admettons que u est un nombre entier positif déterminé suffisemment grand et que toutes les grandeurs envisagées possèdent les derivées continues d'ordre u. X_n de la classe considérée u sera dit brièvement *espace X_n* et les systèmes des coordonnées dans celui-ci — *admissibles*.

Nous voulons rappeler maintenant la notion de l'objet géométrique qui est une notion fondamentale dans la géométrie de l'espace X_n. Si dans un certain domaine de l'éspace X_n nous faisons associer à tout système des coordonnées et à chacun de ses points, $N \geqslant 1$ nombres $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ qui dépendent du choix du point et du système des coordonnées, nous dirons que nous avons dans le domaine considéré un objet Ω dans le sens le plus général. $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ seront appelées les composantes de l'objet au point donné dans le système des coordonnées envisagé. Pour déterminer un objet il suffit de définir ses composantes dans tout point d'un système des coordonnées et de donner le moyen de les transformer si l'on passe à un système des coordonées différent.

Il peut arriver que les valeurs des composantes de l'objet dans chaque point du système des coordonnées (λ') ne dépendent que des valeurs des composantes de cet objet au point envisagé par rapport au système des coordonnées (λ), des coordonnées de ce point ξ^λ dans le système (λ) ainsi que des fonctions $\xi^{\lambda'}$ et des dérivées partielles des fonctions $\xi^{\lambda'}$ jusqu'au rang $v \leqslant u$ (inclusivement) dans ce point. Si en même temps la forme de cette dépendance est la même pour tous les points et tous les couples des systèmes des coordonnées admissibles (λ) et (λ), nous dirons que l'objet est un objet géométrique de la classe v. Dans ce qui va suivre nous ne nous occuperons que des objets géométriques ainsi déterminés.

Les objets géométriques dont les composantes se transforment linéairement et homogènément par raport à $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$ lors d'un changement du système des coordonnées, sont appelés *grandeurs*. Les grandeurs dont nous nous occuperons, seront *les densités* et *les affineurs de densité*.

La densité $\overset{(\lambda)}{\mathfrak{a}}$ *du poids* k n'a qu'une composante qui se transforme d'une manière suivante

$$(1.4) \qquad \overset{(\lambda')}{\mathfrak{a}} = \Delta^{-k} \overset{(\lambda)}{\mathfrak{a}}.$$

La densité du poids *nulle* est un *scalaire*. Un scalaire ω est donc un objet qui ne change pas si l'en passe au nouveau système des coordonnées. On aura donc:

$$(1.5) \qquad \overset{(\lambda')}{\omega} = \overset{(\lambda)}{\omega} = \omega.$$

Nous désignerons dans la suite les scalaires par les lettres grécques.

Un affineur de densité de l'ordre $p+q$ et du poids k, $\mathfrak{A}^{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p}{}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\dots,\varkappa_q}$, est un objet à n^{p+q} composantes qui se transforment d'après la règle suivante:

$$(1.6)\qquad \mathfrak{A}^{\lambda'_1\dots\lambda'_p}{}_{\varkappa'_1\dots\varkappa'_q} = \Delta^{-k} A^{\lambda'_1}_{\lambda_1}\dots A^{\lambda'_p}_{\lambda_p} A^{\varkappa_1}_{\varkappa'_1}\dots A^{\varkappa_q}_{\varkappa'_q} \mathfrak{A}^{\lambda_1\dots\lambda_p}{}_{\varkappa_1\dots\varkappa_q}.$$

Conformément à la convention introduite par EINSTEIN, nous effectuons la sommation dans cette formule par rapport à chaque indice qui apparait deux fois: une fois en haut et une fois en bas des letters principales. Les indices supérieurs $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ nous appelerons indices contravariants et les indices inférieurs $\varkappa_1,\varkappa_2,\dots,\varkappa_q$ — indices covariants. Les densités et les affineurs de densité du poids différent de zéro seront désignés par les lettres gothiques.

Les affineurs de densité du poid nulle seront appelés brièvement — *affineurs*. Nous les désignerons par les lettres latines.

Les affineurs les plus simples sont les *vecteurs*: le *vecteur covariant* v_λ et *contravariant* u^λ possèdent chacun n composantes déterminés.

D'une grande utilité pratique pour les formules est l'affineur $A^\lambda_\varkappa$ [1]) qui possède les mêmes composantes dans tous les systèmes des coordonnées, notamment

$$(1.7)\qquad A^\lambda_\varkappa = \begin{vmatrix} 1 & \text{pour } \lambda=\varkappa \\ 0 & \text{,,} \quad \lambda\neq\varkappa. \end{vmatrix}$$

De la définition même de $A^\lambda_\varkappa$ résulte immédiatement que pour une grandeur arbitraire $S_{\nu\mu}$ on aura l'égalité:

$$(1.8)\qquad S_{\nu\mu} A^\mu_\lambda = S_{\nu\lambda}$$

au sujet de laquelle on doit répéter la même convention sur la sommation par rapport aux indices que nous avons faite plus haut.

---

[1]) Il ne faut pas confondre le symbole $A^\lambda_\varkappa$ avec le symbole $A^{\lambda'}_\lambda = \frac{\partial \xi^{\lambda'}}{\partial \xi^\lambda}$ que nous avons introduit plus haut.

Nous effectuons avec les grandeurs les operations invariantes suivantes qui conduisent à des grandeurs nouvelles.

L'addition de deux grandeurs de même ordre contre- et covariants et de même poids est effectuée en additionnant les composantes correspondantes. La grandeur obtenue aura la même ordre et le même poids.

La multiplication de deux grandeurs nous donne une grandeur de l'ordre et du poids égaux à la somme des ordres et des poids de deux facteurs. En multipliant par exemple les grandeurs $\mathfrak{W}_{\lambda}^{\cdot\nu\mu}$ et $\mathfrak{N}_{\omega}^{\cdot\tau}$ nous obtiendrons la grandeur $\mathfrak{S}_{\lambda\cdot\cdot\omega}^{\cdot\nu\mu\cdot\tau}$ dont les composantes sont données par la formule

$$\mathfrak{S}_{\lambda\cdot\cdot\omega}^{\cdot\nu\mu\cdot\tau} = \mathfrak{W}_{\lambda}^{\cdot\nu\mu}\mathfrak{N}_{\omega}^{\cdot\cdot\tau}.$$

La réduction d'une grandeur consiste dans la formation d'une nouvelle grandeur en effectuant sur la grandeur donnée la sommation par rapport à deux de ses indices: un covariant et un contravariant. Ainsi p. ex. en réduissant la grandeur $\mathfrak{P}_{\lambda\mu\cdot\cdot\tau}^{\cdot\cdot\varrho\sigma}$ relativement à ses indices λ et ϱ, nous obtenons la grandeur nouvelle $\mathfrak{W}_{\mu\cdot\tau}^{\cdot\sigma}$ donnée par la formule:

$$\mathfrak{W}_{\mu\cdot\tau}^{\cdot\sigma} = \sum_{\lambda|1}^{n} \mathfrak{P}_{\lambda\mu\cdot\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda\sigma} = \mathfrak{P}_{\lambda\mu\cdot\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda\sigma}$$

où le signe de la sommation, conformément à notre convention, est omis.

La contraction de deux grandeurs consiste dans la réduction de la grandeur résultant de la multiplication de ces grandeurs par rapport à deux indices appartenant aux facteurs différents.

La symétrisation ou la mise en évidence de la partie symétrique de la grandeur relative aux p indices covariants et contravariants donnés consiste dans la formation d'une nouvelle grandeur dont chaque composante est égale à la somme des composantes correspondantes de la grandeur donnée obtenues par toutes les permutations possibles des indices envisagés divisée par $p!$.

La symétrisation de la grandeur sera indiquée par la mise des indices correspondants entre les crochets ronds. La partie symétrique de la grandeur $T^{\omega}_{\cdot\lambda\mu\varkappa\nu}$ relativement aux indices

λ, μ, ν sera donnée par la formule:

(1.9)
$$T^{\omega}_{\cdot(\lambda\mu|\varkappa|\nu)} = \frac{1}{3!}(T^{\omega}_{\cdot\lambda\mu\varkappa\nu} + T^{\omega}_{\cdot\mu\nu\varkappa\lambda} + T^{\omega}_{\cdot\nu\lambda\varkappa\mu} + T^{\omega}_{\cdot\mu\lambda\varkappa\nu} + T^{\omega}_{\cdot\lambda\nu\varkappa\mu} + T^{\omega}_{\cdot\nu\mu\varkappa\lambda}).$$

L'alternation consiste dans la mise en évidence de la partie alternée de la grandeur relativement aux p indices contre-ou-covariants. Nous effectuons cette alternation d'une manière analogue à la symétrisation en attribuant toutefois aux addendes avec les permutations impaires les signes négatifs. Nous indiquons une alternation en mettant les indices envisagés entres les crochets rectangulaires. Ainsi p. ex. la partie alternée de la grandeur $S_{\lambda\mu\nu}$ relative aux indices λ et μ s'obtiendra de la formule:

(1.10)
$$S_{[\lambda\mu]\nu} = \frac{1}{2!}(S_{\lambda\mu\nu} - S_{\mu\lambda\nu}).$$

La symétrisation et l'alternation transforment une grandeur en une autre avec le même poids et le même ordre.

Dans le calcul des composantes d'une grandeur alternée on se sert des règles analogues aux règles du développement d'un déterminant suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne. On aura p. ex.

(1.11)
$$K_{[\nu\mu\lambda]\varkappa} = \frac{1}{3}(K_{[\nu\mu]\lambda\varkappa} - K_{[\nu\lambda]\mu\varkappa} + K_{[\mu\lambda]\nu\varkappa}).$$

Un affineur purement covariant ou contre-variant qui est égale à la partie alternée relativement à tous les m indices est appelé *m-vecteur*. En particulier l'affineur $F^{\lambda\varkappa}$, remplissant la condition:

(1.12)
$$F^{\lambda\varkappa} = F^{[\lambda\varkappa]} = -F^{\varkappa\lambda}$$

est dit *bi-vecteur contravariant*.

On peut démontrer [2]) l'existence dans X_n du *n-vecteur* de densité covariant $\mathfrak{n}_{\lambda_1,\ldots\lambda_n}$ du poids -1 ainsi que du n-vecteur de densite contre-variant $\mathfrak{E}^{\lambda_1,\ldots\lambda_n}$ du poids $+1$ qui possèdent dans tous les systèmes de repères les mêmes composantes égales à $+1$ ou -1 suivant que la suite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ est une per-

[2]) Schouten—Struik, *Einführung*... I, 29.

mutation paire ou impaire de la suite $(1,...,n)$ et égales à zéro dans tous les autres cas.

L'affineur purement covariant ou contravariant qui est égal à sa partie symétrique relativement à tous ses indices est appelé *tenseur* covariant ou contravariant. Le tenseur covariant du deuxième ordre $a_{\lambda\varkappa}$ remplit ainsi la condition:

$$a_{\lambda\varkappa} = a_{(\lambda\varkappa)} = a_{\varkappa\lambda}. \tag{1.13}$$

Le tenseur contravariant $b^{\lambda\varkappa}$ remplissant la condition

$$a_{\lambda\varkappa} b^{\varkappa\mu} = A_{\lambda}^{\mu} \tag{1.14}$$

est dit tenseur inverse de $a_{\lambda\varkappa}$. Nous le désignerons par $a^{\lambda\varkappa}$. Il résulte de la théorie des matrices que le tenseur inverse du tenseur donné est défini univoquement si le déterminant

$$\mathfrak{a} = |a_{\lambda\varkappa}| \neq 0.$$

§ 2. Systèmes de référence non holonomes.

Nous pouvons définir dans chaque système de coordonnées un système de n-vecteurs covariants $\overset{\varkappa}{e}_{\lambda}$, $(\varkappa = 1, 2, ..., n)$ et contravariants $\underset{\varkappa}{e}^{\lambda}$, $(\varkappa = 1, 2, ..., n)$ au moyen des formules suivantes

$$\underset{\varkappa}{e}^{\lambda} \overset{*}{=} \overset{\varkappa}{e}_{\lambda} \overset{*}{=} A_{\lambda}^{\varkappa}, \tag{1.15}$$

ou l'étoile au dessus du signe d'égalité indique que l'égalité n'a lieu que dans le système de coordonnées donné $(\varkappa)$. Nous appelons ces vecteurs — *vecteurs-mésures* du système de coordonnées $(\varkappa)$. Les composantes $\overset{\varkappa'}{e}_{\lambda}$ dans le système $(\varkappa)$ des vecteurs-mésures $\overset{\varkappa'}{e}_{\lambda'}$, d'un autre système des coordonnées $(\varkappa')$ sont données par la formule

$$\overset{\varkappa'}{e}_{\lambda} = \overset{\varkappa'}{e}_{\lambda'} A_{\lambda}^{\lambda'} \overset{*}{=} A_{\lambda}^{\varkappa'} \overset{*}{=} \partial_{\lambda} \xi^{\varkappa'}. \tag{1.16}$$

Si nous définissons maintenant dans le système de coordonnées $(\varkappa)$ n champs vectoriels arbitraires linéairement indépendants $\overset{\varkappa'}{e}_{\lambda}$, qui ne sont pas nécessairement gradients, l'existence d'un système de coordonnées $(\varkappa')$ dans lequel ces vecteurs soient les vecteurs-mésures n'en découle pas. Autrement dit il n'existe pas nécessairement une telle suite des fonctions

$\xi^{\varkappa'}(\xi' \ldots \xi^n)$ pour laquelle auraient lieu les égalités

$$\partial_\lambda \xi^{\varkappa'} = \overset{\varkappa'}{e}_\lambda.$$

Nous désignerons par $\underset{\varkappa'}{e^\lambda}$ un système inverse de n vecteurs par rapport aux vecteurs $\overset{\varkappa'}{e}_\lambda$, c'est à dire un système pour lequel valent les égalités

$$\sum_{\varkappa'|1}^{n} \underset{\varkappa'}{e^\lambda} \overset{\varkappa'}{e}_\nu = A_\nu^\lambda.$$

En considérant les relations

$$\text{(1.17)} \qquad \overset{\varkappa'}{e}_\lambda \overset{*}{=} A_\lambda^{\varkappa'} \quad \text{et} \quad \underset{\varkappa'}{e^\lambda} \overset{*}{=} A_{\varkappa'}^\lambda$$

comme les définitions des symboles $A_\lambda^{\varkappa'}$ et $A_{\varkappa'}^\lambda$, on définira les composantes de nos grandeurs dans le système de référance non holonome $(\varkappa')$ au moyen des formules (1.4) et (1.6) où dans leurs seconds membres figurent les composantes des grandeurs correspondantes dans le système de coordonnées $(\varkappa)$.

L'expression

$$\text{(1.18)} \qquad \Omega_{\mu'\lambda'}^{\varkappa'} = A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} \partial_{[\mu} A_{\lambda]}^{\varkappa'} \overset{*}{=} A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} \partial_{[\mu} \overset{\varkappa'}{e}_{\lambda]}$$

n'est égale identiquement à zéro que dans le cas où les vecteurs $\overset{\varkappa'}{e}_\lambda$ sont des gradients c'est à dire quand $(\varkappa')$ est un système de coordonnées.

On peut démontrer [3]) que $\Omega_{\mu'\lambda'}^{\varkappa'}$ est un objet géométrique. Cet objet nouveau est appélé *un objet de non — holonomie du système de référence* $(\varkappa')$.

§ 3. Grandeurs dans V_n.

Si l'espace X_n est pourvu dans chaque point d'un tenseur déterminé de second ordre $a_{\lambda\varkappa}$ permettant de mésurer les longueurs des vecteurs et les angles entre eux, nous dirons que l'espace est riemannien et nous le désignerons brièvement par V_n. Le tenseur $a_{\lambda\varkappa}$ sera dit *tenseur métrique* de l'espace V_n. Nous admettons que

$$\mathfrak{a} = |a_{\lambda\varkappa}| \neq 0.$$

---

[3]) Schouten—Struik, *Einführung*... I, 68.

Les vecteurs $u^\varkappa$ et $v^\varkappa$ dont chacun possède les composantes non identiquement nulles seront dits *perpendiculaires* entre eux si

(1.19) $$a_{\lambda\mu} u^\lambda v^\mu = 0.$$

Le vecteur $i^\varkappa$ sera dit *vecteur-unité* si

(1.20) $$a_{\lambda\varkappa} i^\lambda i^\varkappa = \pm 1.$$

Le vecteur $s^\varkappa$, remplissant la relation

(1.21) $$a_{\lambda\varkappa} s^\lambda s^\varkappa = 0$$

sera appelé *asymptotique*. Le dernière relation peut être considérée comme l'équation d'un cône dans l'espace ordinaire à n dimensions. Ce cône sera imaginaire ou réel suivant que la forme quadratique du premier membre de la dernière équation est définie ou indéfinie. Nous dirons que ce cône est un *cône des vecteurs asymptotiques*.

L'ensemble de tous les vecteurs linéairement dépendants de deux vecteurs donnés et indépendants entre eux sera dit *bi-direction*. Si nous choisissons dans une bi-direction deux vecteurs-unités $i^\varkappa$ et $j^\varkappa$ perpendiculaires entre eux, le bivecteur

(1.22) $$f^{\lambda\mu} = 2i^{[\lambda} j^{\mu]}$$

sera dit *bivecteur-unité* de cette bi-direction.

Nous employons le tenseur $a_{\lambda\varkappa}$ pour ce que l'on appelle *abaissement des indices* des grandeurs. Ainsi p. ex., en partant des affineurs $i^\varkappa$, $K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, nous pouvons définir les affineurs nouveaux i_λ, $K_{\nu\mu\lambda\sigma}$ au moyen des relations:

(1.23) $$i^\varkappa a_{\lambda\varkappa} = i_\lambda; \quad K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} a_{\varkappa\sigma} = K_{\nu\mu\lambda\sigma}.$$

De même à l'aide du tenseur $a^{\lambda\varkappa}$ inverse à $a_{\lambda\varkappa}$ [4]) nous pouvons *élever les indices* p. ex.

(1.24) $$j_\lambda a^{\lambda\varkappa} = j^\varkappa; \quad K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} a^{\nu\omega} a^{\mu\sigma} a^{\lambda\varrho} = K^{\omega\sigma\varrho\varkappa}.$$

Les opérations d'abaissement et du relèvement des indices établissent ainsi une certaine correspondance bi-univoque entre les grandeurs contre- et covariantes dans V_n. Nous donnons

[4]) Page 36, form. (1.14).

aux grandeurs qui se correspondent ainsi entre eux la même dénomination et nous les désignons par la même lettre fondamentale. En appliquant la méthode d'abaissement et du relèvement des indices, nous pouvons donner aux formules (1.19, 20, 21) la forme suivante:

$$u^{\lambda} v_{\lambda} = 0; \quad i_{\lambda} i^{\lambda} = \pm 1; \quad s^{\lambda} s_{\lambda} = 0.$$

Si nous choisissons dans l'espace V_n n champs vectoriaux des vecteurs-unités perpendiculaires entre eux $\underset{1}{i}^{\lambda}, \underset{2}{i}^{\lambda}, \ldots, \underset{n}{i}^{\lambda}$ nous obtiendrons les relations [5])

$$(1.25) \quad \begin{aligned} a^{\lambda\varkappa} &= \underset{1}{\varepsilon} \underset{1}{i}^{\lambda} \underset{1}{i}^{\varkappa} + \underset{2}{\varepsilon} \underset{2}{i}^{\lambda} \underset{2}{i}^{\varkappa} + \ldots + \underset{n}{\varepsilon} \underset{n}{i}^{\lambda} \underset{n}{i}^{\varkappa} = \sum_{p|1}^{n} \underset{p}{\varepsilon} \underset{p}{i}^{\lambda} \underset{p}{i}^{\varkappa}; \\ a_{\lambda\varkappa} &= \underset{1}{\varepsilon} \underset{1}{i}_{\lambda} \underset{1}{i}_{\varkappa} + \underset{2}{\varepsilon} \underset{2}{i}_{\lambda} \underset{2}{i}_{\varkappa} + \ldots + \underset{n}{\varepsilon} \underset{n}{i}_{\lambda} \underset{n}{i}_{\varkappa} = \sum_{p|1}^{n} \underset{p}{\varepsilon} \underset{p}{i}_{\lambda} \underset{p}{i}_{\varkappa}; \end{aligned}$$

où

$$\underset{p}{\varepsilon} = \underset{p}{i}^{\lambda} \underset{p}{i}_{\lambda} = \pm 1.$$

Nous dirons que le tenseur $a_{\lambda\varkappa}$ est défini positif ou négatif si tous les $\underset{p}{\varepsilon}$ ont le même signe positif ou négatif. Dans le cas contraire nous dirons que l'on a un tenseur métrique indéfini du V_n. Le nombre q indiquant le nombre de $\underset{p}{\varepsilon}$ avec le signe positif s'appelle indice du tenseur [6]). Le système de référence déterminé par les vecteurs introduits plus haut $\underset{1}{i}^{\lambda}, \underset{2}{i}^{\lambda}, \ldots, \underset{n}{i}^{\lambda}$ comme vecteurs-mésures sera appelé système orthogonal de référence (h). Nous le distinguerons en employant comme indices les lettres latines pour les composantes des grandeurs rapportées à ce système. Comme on le voit des équations (1.25), les composantes a^{kl} et a_{kl} du tenseur métrique dans un système orthogonal de référence (h) sont données par la formule:

$$a^{kl} = a_{kl} = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ pour } k \neq l \\ \underset{l}{\varepsilon} \text{ pour } k = l. \end{array} \right.$$

A l'aide des vecteurs en question $\underset{1}{i}^{\lambda}, \underset{2}{i}^{\lambda}, \ldots, \underset{n}{i}^{\lambda}$ nous pouvons

---

[5]) Sch., Str., I, 51.

[6]) Sch., Str., I, 45.

définir le *n-vecteur-unité* par la formule suivante [7]):

(1.26) $$I^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} = n!\ \underset{1}{i}^{[\lambda_1}\underset{2}{i}^{\lambda_2}\ldots\underset{n}{i}^{\lambda_n]}.$$

Les composantes $I^{h_1,h_2,\ldots,h_n}$ du n-vecteur-unité dans un système orthogonal de référence sont égales à ± 1 si $h_\alpha \neq h_\beta$ pour $\alpha \neq \beta$; elles sont nulles dans le cas contraire.

Il est facile de montrer que les dérivées partielles du scalaire ω définissent le vecteur $v_\lambda = \partial_\lambda \omega$ tandis que les dérivées du vecteur ne définissent pas la grandeur dans notre sens du terme. La différentiation du vecteur n'est donc pas une opération invariante conduisant toujours d'une grandeur à une autre. En cherchant à généraliser la differentiation afin d'obtenir une opération invariante, on parvient à la conception de la dérivée covariante dont la définition éxige un nouvel objet géométrique $\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}$ dont les composantes s'appellent *les facteurs du déplacement linéaire.*

Dans l'espace V_n on peut prendre pour facteurs du déplacement linéaire les symboles de CHRISTOFFEL de deuxième espèce. On aura donc dans un système général de référence

(1.27) $$\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda} = \left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\} = \frac{1}{2} a^{\varkappa\sigma}(\partial_\mu a_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda a_{\sigma\mu} - \partial_\sigma a_{\mu\lambda}) - \Omega^\varkappa_{\mu\lambda} +$$
$$+ a_{\mu\tau} a^{\varkappa\sigma} \Omega^\tau_{\lambda\sigma} + a_{\lambda\tau} a^{\varkappa\sigma} \Omega^\tau_{\mu\sigma}$$

où $\partial_\mu a_{\lambda\sigma} = \dfrac{\partial a_{\lambda\sigma}}{\partial \xi^\mu}$ et $\Omega^\varkappa_{\mu\lambda}$ désigne l'objet de non holonomie du système $(\varkappa)$ défini par la formule (1.18). Si donc $(\varkappa)$ est un système des coordonnées, les trois dernières expressions de la formule (1.27) tombent et on aura une définition habituelle des symboles de CHRISTOFFEL de deuxième espèce dans un système de coordonnées $(\varkappa)$.

Nous désignons la dérivée covariante par le symbole ∇_μ. Pour un scalaire ω cette dérivée est définie comme une dérivée ordinaire. On aura donc:

(1.28[1]) $$\nabla_\mu \omega = \frac{\partial \omega}{\partial \xi^\mu} = \partial_\mu \omega.$$

---

[7]) Sch., Str., I, 53.

L'exemple suivant nous éclairera la définition de la dérivée covariante pour un affineur arbitraire:

(1.28²) $\nabla_\mu T_{\omega \cdot \tau}^{\cdot \nu} = \partial_\mu T_{\omega \cdot \tau}^{\cdot \nu} - T_{\mu\omega}^{\sigma} T_{\sigma \cdot \tau}^{\cdot \nu} + T_{\mu\sigma}^{\nu} T_{\omega \cdot \tau}^{\cdot \sigma} - T_{\mu\tau}^{\sigma} T_{\omega \cdot \sigma}^{\cdot \nu}$.

On pourrait de même définir les dérivées covariantes des autres grandeurs mais elles n'interviennent pas dans nos considérations ultérieures [8]). La relation précédente montre que si l'on effectue une différentiation covariante multiple, le résultat dépend en général de l'ordre des dérivations successives. Pour un vecteur p. ex., on a la relation:

(1.29) $$\nabla_{[\nu} \nabla_{\mu]} v^\varkappa = \tfrac{1}{2} K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} v^\lambda,$$

où

(1.30) $$K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = 2\partial_{[\nu} T_{\mu]\lambda}^{\varkappa} + 2 T_{[\nu|\varrho|}^{\varkappa} T_{\mu]\lambda}^{\varrho} + 2\Omega_{\nu\mu}^{\varrho} T_{\varrho\lambda}^{\varkappa}$$

désigne ce que l'on est convenu d'appeler l'affineur de courbure de l'espace V_n.

Remarquons que les systèmes de coordonnées dans lesquels toutes les composantes du tenseur métrique sont constantes n'existent que si $K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = 0$. Tous ces systèmes peuvent être obtenus de l'un d'eux à l'aide de toutes les transformations linéaires à coefficients constants. L'espace dit dans ce cas *un espace euclidien* sera désigné par R_n.

Il est facile de vérifier que l'affineur de courbure satisfait aux quatre identités algébriques suivantes [9])

(1.31)
1) $K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = -K_{\mu\nu\lambda\varkappa} = K_{[\nu\mu]\lambda\varkappa}$
2) $K_{[\nu\mu\lambda]\varkappa} = 0$
3) $K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = -K_{\nu\mu\varkappa\lambda} = K_{\nu\mu[\lambda\varkappa]}$
4) $K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = K_{\lambda\varkappa\nu\mu}$

où

(1.32) $$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\omega} a_{\omega\varkappa}.$$

De l'affineur de courbure on obtient par la réduction

(1.33) $$K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a^{\nu\varkappa} = K_{\mu\lambda}$$

---

[8]) Sch., Str., I, p. 79, f. (7.16) et (7.17).

[9]) Sch., Str., I, p. 113.

nouvel affineur $K_{\mu\lambda}$ et nous pouvons démontrer[10]), qu'il est un tenseur, c'est à dire que

$$(1.34) \qquad K_{\mu\lambda} = K_{\lambda\mu} = K_{(\mu\lambda)} = \tfrac{1}{2}(K_{\mu\lambda} + K_{\lambda\mu}).$$

Le tenseur que nous venons d'obtenir s'appelle tenseur de Ricci. En réduisant encore la grandeur $K_{\mu\lambda}$ nous obtiendrons le scalaire

$$(1.35) \qquad K = K_{\mu\lambda}\, a^{\mu\lambda}$$

et la grandeur formée de celui-ci

$$(1.36) \qquad \varkappa = \frac{1}{n(n-1)} K$$

que l'on nomme courbure scalaire de l'éspace V_n.

§ 4. Espaces V_m plongés dans V_n.

m vecteurs contravariants linéairement indépendants au point P de l'espace déterminent une m-direction qui est l'ensemble de tous les vecteurs contravariants qui dépendent linéairement des m vecteurs donnés. Si dans une m-direction donnée existent m vecteurs non asymptotiques mutuellement perpendiculaires, nous dirons que cette direction est non singulière. Cela signifie géométriquement que la m-direction donnée n'occupe aucune position particulière par rapport au cône des vecteurs asymptotiques. Les vecteurs asymptotiques de la m-direction non singulière, s'ils existent en tant que grandeurs réelles, forment donc un cône non dégénéré de deuxième dégré à $(m-1)$ dimensions. On voit que si la m-direction déterminée par les vecteurs $\underset{1}{v^\lambda}, \underset{2}{v^\lambda}, \ldots, \underset{m}{v^\lambda}$ est non singulière, la m-direction determinée par m vecteurs dont les composantes diffèrent peu de $\underset{a}{v^\lambda}$, $(a = 1, 2, \ldots, m)$, sera aussi non singulière.

Considérons dans V_n l'espace plongé X_m possédant dans tout point une m-direction tangente non singulière. L'espace V_n induit dans l'espace X_m une métrique, c'est à dire change X_m en V_m. Choisissons dans l'espace V_n un système de n champs des

10) Sch., Str., I, p. 195.

vecteurs-unités mutuellement perpendiculaires $\underset{h}{i}^{\varkappa}, (h=1,2,\dots n)$, de manière que dans les points de V_m les m premiers de ces vecteurs soient tangents à V_m. Le tenseur $a'^{\lambda\varkappa}$ définissant la métrique induite par V_n sur V_m sera calculé de la formule [11])

(1.37) $$a'^{\lambda\varkappa} = \sum_{a|1}^{m} \varepsilon \underset{a}{i}^{\lambda} \underset{a}{i}^{\varkappa}$$

et de même

(1.38) $$a'_{\lambda\varkappa} = \sum_{a|1}^{m} \varepsilon \underset{a}{i}_{\lambda} \underset{a}{i}_{\varkappa}.$$

Les deux dernières relations donnent immédiatement que

(1.39) $$a'^{\lambda\varkappa} a'_{\lambda\varkappa} = m.$$

Prenons en considération dans tout point de l'espace V_n p m_i-directions non singulières, où $i=1,2,\dots p$ et

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n,$$

mutuellement perpendiculaires, c'est à dire telles que chaque vecteur de l'une de ces m_i-directions soit perpendiculaire à tous les vecteurs des m_i-directions restants. Choisissons encore dans chacune des m_i-directions m_i vecteurs-unités mutuellement perpendiculaires. Nous obtiendrons de cette manière dans tout point de V_n n vecteurs-unités mutuellement perpendiculaires

$$\underset{1}{i}^{\lambda}, \underset{2}{i}^{\lambda}, \dots, \underset{m_1}{i}^{\lambda}, \underset{m_1+1}{i}^{\lambda}, \dots \underset{n}{i}^{\lambda}.$$

Si nous désignons par $\underset{i}{a}^{\lambda\mu}$ le tenseur métrique induit sur une V_{m_i} arbitraire tangente, au point donné à la m_i-direction envisagée, nous obtiendrons pour ce point la relation:

(1.40) $$a^{\lambda\mu} = \underset{1}{a}^{\lambda\mu} + \underset{2}{a}^{\lambda\mu} + \dots + \underset{p}{a}^{\lambda\mu}.$$

---

[11]) Comp. § 3, form (1.25).

Définissons encore l'affineur de liaison $B^\lambda_\varkappa$ qui nous permet de calculer les *V_m-composantes des grandeur dans V_n*. Nous le ferons à l'aide de la formule suivante:

$$(1.41)\qquad B^\varkappa_\lambda = \sum_{a|1}^{m} \varepsilon \underset{a}{i^\varkappa} \underset{a}{i_\lambda}.$$

Des relations (1.37), (1.38) et (1.41) résulte immédiatement que

$$B^\varkappa_\lambda = a'^{\varkappa\mu} a'_{\mu\lambda}.$$

La V_m composante d'une grandeur que l'on pourrait nommer composante parallèle à l'espace V_m se calcule par la contraction avec l'affineur $B^\varkappa_\lambda$. Ainsi p. ex. nous appelons la V_m-composante de l'affineur de courbure de l'espace V_n l'affineur $K'{}_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa}$ défini dans les points de l'espace V_m par la formule:

$$(1.42)\qquad K'{}_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa} = K_{\sigma\varrho\omega}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\tau} B^\sigma_\nu B^\varrho_\mu B^\omega_\lambda B^\varkappa_\tau.$$

Des relations (1.38) et (1.41) nous avons aussi:

$$(1.43)\qquad a'_{\lambda\varkappa} = B^\varrho_\lambda B^\sigma_\varkappa a_{\varrho\sigma};$$

$a'_{\lambda\varkappa}$ est donc la V_m-composante du tenseur métrique de l'espace V_n.

Si une grandeur de l'espace V_n est égale à sa V_m-composante, nous dirons que cette grandeur est située elle-même dans V_m. Ainsi p. ex. le vecteur $v^\varkappa$ tangent à V_m vérifie la relation:

$$v^\varkappa B^\lambda_\varkappa = v^\lambda.$$

Il est évident que la V_m-composante d'une grandeur de l'espace V_n ne peut être définie que dans les points de l'espace V_m.

Donnée par la formule (1.42), la V_n composante de l'affineur de courbure de l'espace V_n s'appelle affineur de courbure extorqué de sous-espace V_m.

Si nous choisissons dans l'espace V_n un système de coordonnées ($\varkappa$) tel que le sous-espace considéré V_m soit donné par l'équation $\xi^p = c^p$ où $p = m+1, \ldots, n$ on aura pour le tenseur

de la métrique induite, comme il résulte des formules (1.37) et (1.38), les relations suivantes:

$$a'^{\lambda\mu} \doteq a'_{\lambda\mu} = 0 \text{ pour } \lambda \text{ ou } \mu = m+1, \ldots, n$$

Seules les composantes a'_{bc} ou $b, c = 1, 2, \ldots, m$ peuvent être différentes de zéro.

Définissons maintenant aux points de l'espace V_m l'affineur $\overline{K}_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ au moyen des égalités suivantes dans le système des coordonnées donné

$$\overline{K}_{abc}^{\cdot\cdot\cdot d} \stackrel{*}{=} 2\,\partial_{[a} \Gamma_{b]c}^{d} + 2\Gamma_{[a|e|}^{d} \Gamma_{b]c}^{e},$$

(1.44) $$\text{où } \Gamma_{ab}^{c} = \tfrac{1}{2} a'^{cd} (\partial_a a'_{bd} + \partial_b a'_{ad} - \partial_d a'_{ab})$$

$$\text{pour } a, b, c, d = 1, 2, \ldots m \text{ et}$$

$$\overline{K}_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = 0$$

dans tout autre cas. L'affineur de courbure $\overline{K}_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ est donc un affineur de courbure de sous-espace V_m considéré comme un espace riemannien indépendant avec la métrique définie par le tenseur $a'_{\lambda\varkappa}$. Cet affineur s'appelle aussi *affineur de courbure absolue de sous-espace* V_m. Il est en général différent de l'affineur $K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ défini par la formule (1.42). Nous pouvons à cet effet démontrer la proposition suivante [12]).

L'affineur de courbure de l'espace V_m plongé dans l'espace V_n et géodésique dans un certain point [13]) *est égal à la V_m-composante de l'affineur de courbure de l'espace V_n au point en question.*

Le scalaire

(1.45) $$\varkappa' = \frac{1}{m(m-1)} K'_{\nu\mu\lambda\varkappa}\, a'^{\nu\varkappa} a'^{\mu\lambda}$$

---

[12]) Sch., Str., II, p. 133.

[13]) Schouten, I, p. 99; II, p. 85. Le sous espace géodésique au point envisagé est formé p. ex. par l'ensemble de toutes les géodésiques sortant d'un point et tangentes à une m-direction non singulière. Nous appelons une géodésique tout ligne satisfaisant à l'équation Euler-Lagrange du calcul des variations se rapportant au problème des lignes les plus courtes dans l'espace envisagé.

s'appelle courbure scalaire extorquée de l'espace V_m. Dans le cas où V_m est géodésique au point envisagé, $\varkappa'$ est la courbure scalaire absolue dans ce point.

Rappelons encore la définition de la mésure riemannienne de courbure de la bi-direction donnée au point P de l'espace V_n. Nous supposons que cette bi-direction est non singulière, c'est à dire qu'elle n'occupe aucune position spéciale par rapport au cône des vecteurs asymptotiques. Représentons nous un ensemble des géodésiques tangentes au point P à tous les vecteurs de la bi-direction donnée. La surface à deux dimensions ainsi obtenue V_2 est géodésique au point P. La courbure scalaire de V_2 est dite *mésure riemannienne de courbure de la bi-direction* donnée[14]). En considérant au lieu de la bi-direction, la m-direction ($1 < m < n$) non singulière c'est à dire la direction qui n'occupe aucune position spéciale par rapport au cône des vecteurs asymptotiques, nous arrivons à la notion de la courbure scalaire de la m-direction qui est une généralisation de la notion de la mésure riemannienne de courbure.

Définition fondamentale. *La courbure scalaire de sous-espace géodésique au point P et tangente à une certaine m-direction non singulière s'appelle courbure scalaire de cette m-direction au point P de l'espace*[15]).

§ 5. Connaissances générales sur les espaces E_n, C_n, S_n.

E_n. L'espace V_n quand $n > 2$ est nommé espace einsteinien E_n [16]), si le tenseur de Ricci $K_{\mu\lambda}$ ne diffère que par le facteur scalaire λ du tenseur métrique $a_{\mu\lambda}$ c'est à dire quand on a la relation

$$K_{\mu\lambda} = \lambda\, a_{\mu\lambda}. \tag{1.46}$$

On peut démontrer[17]) que le scalaire λ doit être constant.

---

[14]) Eisenhart, Riem. Geom. p. 79.

[15]) Cette notion fut introduite dans la publication: J. Haantjes et W. Wrona, *Über konformeuklidische und Einsteiniche Raume gerader Dimension* (Koninkl. Nederl. Ak. van Wetenschappen, Proceedings Vol. XLII, Nº 7, 1939) et sera à la base des considérations ultérieures de la présente recherche.

[16]) Schouten désigne par E_n l'espace avec la géométrie affine ordinaire. Nous avertissons le lecteur que nous ne suivons pas les notations de Schouten et nous conformons à la convention adoptée par les géomètres americains.

[17]) Sch., Str., I, p. 125.

L'équation (1.46) subsiste dans chaque espace V_2 mais dans ce cas λ n'est pas toujours constant.

En multipliant les deux membres de la formule (1.46) par $a_{\mu\lambda}$ et en sommant par rapport à deux indices μ et λ nous obtenons

$$(1.47) \qquad K = \lambda A^{\mu}_{\mu} = \lambda n$$

et

$$(1.48) \qquad \varkappa = \frac{\lambda}{n-1}.$$

L'espace E_n possède donc une courbure scalaire constante.

C_n. Si nous introduisons dans l'espace V_n à la place de $a_{\lambda\varkappa}$ un nouveau tenseur métrique

$$(1.49) \qquad {}'a_{\lambda\varkappa} = \sigma a_{\lambda\varkappa},$$

ou σ désigne un certain scalaire, nous disons que nous avons effectué *la transformation conforme du tenseur métrique.* Au lieu de parler de la transformation conforme du tenseur métrique dans un espace riemannien nous pouvons naturellement envisager deux espaces V_n et $'V_n$ avec les tenseurs métriques $a_{\lambda\varkappa}$ et $'a_{\lambda\varkappa}$ en supposant qu'à tous système de référence $(\varkappa)$ dans V_n corresponde un tel système de référénces $(\varkappa)$ dans $'V_n$ que pour les points ayant les coordonnées égales s'applique l'équation (1.49). Nous dirons dans ce cas que les éspaces V_n et $'V_n$ peuvent être représentés mutuellement conformément.

De la relation (1.49) résulte immédiatement:

$$(1.50) \qquad a^{\varkappa\lambda} = \sigma^{-1} {}'a^{\varkappa\lambda}.$$

L'espace V_n, qui par une transformation conforme du tenseur métrique se change en un espace euclidien est nommé *espace conformément euclidien* et sera designé brièvement C_n.

On sait de la géométrie différentielle classique que chaque V_2 peut être conformément représenté dans un espace euclidien à deux dimensions. Definissons dans l'espace V_n le tenseur $L_{\mu\lambda}$ par la formule

$$(1.51) \qquad L_{\mu\lambda} = -K_{\mu\lambda} + \frac{1}{2(n-1)} K a_{\mu\lambda}.$$

Dans le cas $n > 2$ il existe la proposition suivante [18]):

[18]) Sch., Str., II, p. 202.

V_3 est C_3 quand (et dans ce cas seulement) le tenseur $L_{\mu\lambda}$ satisfait identiquement à l'équation différentielle

(1.52) $$\nabla_{[\nu} L_{\mu]\varkappa} = 0.$$

V_n est C_n pour $n > 3$ quand (et dans ce cas seulement) on a identiquement

(1.53) $$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = \frac{4}{n-2} a_{[\nu[\lambda} L_{\mu]\varkappa]};$$

les crochets droits qui se superposent indiquent que l'alternation doit être effectuée indépendamment par rapport aux couples des indices $[\nu, \mu]$ et $[\lambda, \varkappa]$.

Citons encore une proposition qui a une grande importance pratique et qui permet de discerner si un espace est conformément euclidien [19]).

V_n n'est C_n que si les composantes de l'affineur de courbure qui ont quatre indices différent entre eux s'annulent dans chaque système de référence rectangulaire (h).

S_n. L'affineur de courbure dans l'espace riemannien V_2 a toujours la forme suivante [20]):

(1.54) $$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = -2\varkappa\, a_{[\nu[\lambda}\, a_{\mu]\varkappa]}$$

ou $\varkappa$ est un scalaire.

Si l'affineur de courbure de V_n dans le cas $n > 2$ a la forme donnée par la formule (1.54), *l'espace* sera dit *à courbure constante* et sera désignée par S_n.

En multipliant les deux membres de la formule (1.54) par $a^{\nu\varkappa}$ et en sommant par rapport à ν et $\varkappa$ on aura:

(1.55) $$K_{\mu\lambda} = -\varkappa(a_{\nu\lambda}\, a_{\mu\varkappa} - a_{\mu\lambda}\, a_{\nu\varkappa})a^{\nu\varkappa} = -\varkappa(a_{\mu\lambda} - n\, a_{\mu\lambda}) = = (n-1)\varkappa\, a_{\mu\lambda}.$$

De cette égalite résulte, en tenant compte de (1.46) et (1.48), que tout espace S_n est pour $n > 2$ einsteinien dont la courbure scalaire $\varkappa$ est constante. De (1.53) et (1.54) résulte encore que chaque S_n est C_n. Reciproquement, on peut démontrer que l'espace conformément euclidien et einsteinien est à courbure constante.

---

[19]) Sch., Str., II, p. 204.

[20]) Sch., Str., I, p. 115.

De la proposition (1.52) et des relations (1.46), (1.51) résulte directement que E_3 est toujours C_3 et à cause de la dernière rémarque aussi S_3.

La proposition connue suivante nous permet de reconnaitre l'espace S_n.

V_n n'est S_n que si les composantes de l'affineur de courbure K_{hijk} avec plus que deux indices différents sont égaux à zero dans chaque système de référence rectangulaire.

Chapitre 2

Conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace riemannien V_n soit einsteinien E_n

§ 1. Espace einsteinien à un nombre pair de dimensions.

A toute m-direction non singulière au point P de l'espace riemannien V_{2m} correspond d'une manière univoque une autre m-direction perpendiculaire qui n'a avec le premier aucune direction commune. Cette autre m-direction est aussi non singulière. En relation avec cette remarque nous allons démontrer la proposition suivante:

Prop. I. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace V_{2m} soit un espace einsteinien*[21] *E_{2m} est que dans tous les points deux m-directions arbitraires non singulières perpendiculaires entre elles aient les memes courbures scalaires*[22]).

Démonstration. Considérons dans un point P de l'espace V_{2m} deux m-directions remplissant les conditions de la proposition ainsi que deux sous-espaces V'_m et V''_m tangents à elles, qui sont géodésiques au point envisagé. Désignons par $a'^{\lambda\varkappa}$ et $a''^{\lambda\varkappa}$ les tenseurs métriques de ces deux sous-espaces à m-dimensions, par $K'_{\lambda\mu\nu}{}^{\varkappa}$ et $K''_{\lambda\mu\nu}{}^{\varkappa}$ les affineurs de courbure et par $\varkappa'$ et $\varkappa''$ les courbures scalaires correspondantes. Les formules (1.25) et (1.37) nous donnent la relation

$$a_{\lambda\varkappa}=a'_{\lambda\varkappa}+a''_{\lambda\varkappa} \tag{2.1}$$

et de (1.45) et (1.42) résulte que

$$K'=m(m-1)\varkappa'=K'_{\sigma\tau\omega\varrho}\, a'^{\sigma\varrho}\, a'^{\tau\omega}=K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\, B^{\nu}_{\sigma} B^{\mu}_{\tau} B^{\lambda}_{\omega} B^{\varkappa}_{\varrho}\, a'^{\sigma\varrho}\, a'^{\tau\omega}, \tag{2.2}$$

---

[21]) Voir chap. I, p. 46.

[22]) Voir chap. I, p. 46.

$a'^{\lambda\varkappa}$ étant une grandeur de V_m, il s'ensuit que

(2.3) $$a'^{\sigma\varrho} B^{\nu}_{\sigma} B^{\varkappa}_{\varrho} = a'^{\nu\varkappa},$$

ce qui donne pour (2.2) la forme:

(2.4) $$m(m-1)\varkappa' = K' = K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a'^{\nu\varkappa} a'^{\mu\lambda}.$$

On obtiendra pareillement que

(2.5) $$m(m-1)\varkappa'' = K'' = K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a''^{\nu\varkappa} a''^{\mu\lambda}.$$

Des relations (2.1) et (2.5) résulte que

(2.6) $$K'' = K_{\nu\mu\lambda\varkappa}(a^{\nu\varkappa} - a'^{\nu\varkappa})(a^{\mu\lambda} - a'^{\mu\lambda})$$

et en vertu de (1.31) et (1.33) on aura que

(2.7) $$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a'^{\nu\varkappa} a^{\mu\lambda} = K_{\mu\nu\varkappa\lambda} a'^{\nu\varkappa} a^{\mu\lambda} = K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a'^{\mu\lambda} a^{\nu\varkappa} = K_{\mu\lambda} a'^{\mu\lambda}.$$

La formule (2.6), si l'on y applique la dernière relation ainsi que (1.35), prendra la forme:

(2.8) $$K'' = K - 2K_{\mu\lambda} a'^{\mu\lambda} + K'.$$

Nous allons commencer par la démonstration de la nécessité de la condition énoncée. Nous supposerons donc que l'espace soit einsteinien E_{2m}. Dans ce cas la formule (2.8) en tenant compte de (1.46) et (1.47) prendra la forme:

(2.9) $$K'' = 2m\lambda - 2\lambda a_{\mu\lambda} a'^{\mu\lambda} + K'.$$

Des relations (1.28) et (1.37) résulte que

(2.10) $$a_{\mu\lambda} a'^{\mu\lambda} = m$$

et de l'équation (2.9) nous obtenons

(2.11) $$K'' = K',$$

c'est à dire que

(2.12) $$\varkappa'' = \varkappa'.$$

Deux m-directions non singulières perpendiculaires entre elles et arbitrairement choisies ont donc les mêmes courbures scalaires ce que nous voulions précisément montrer.

Avant d'aborder la preuve de la suffisance de la condition anoncée nous voulons démontrer le lemme suivant:

Lemme. *Si le tenseur $b_{\nu\mu}$ est tel que dans chaque point de l'espace on a pour deux vecteurs-unités arbitraires p^μ et q^μ que*

$$\underset{p}{\varepsilon}\, b_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \underset{q}{\varepsilon}\, b_{\mu\nu} q^\mu q^\nu, \tag{2.13}$$

où

$$\underset{p}{\varepsilon} = a_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p^\mu p_\mu = \pm 1,$$

$$\underset{q}{\varepsilon} = a_{\mu\nu} q^\mu q^\nu = q^\mu q_\mu = \pm 1,$$

le tenseur $b_{\mu\nu}$ sera proportionnel au tenseur $a_{\mu\nu}$ c'est à dire qu'il existera un scalaire λ tel que

$$b_{\mu\nu} = \lambda a_{\mu\nu}. \tag{2.14}$$

Pour le démontrer, remarquons que la relation (2.13) peut être récrite sous la forme:

$$\frac{b_{\mu\nu} p^\mu p^\nu}{\underset{p}{\varepsilon}} = \frac{b_{\mu\nu} q^\mu q^\nu}{\underset{q}{\varepsilon}},$$

ou bien encore

$$\frac{b_{\mu\nu} p^\mu p^\nu}{a_{\mu\nu} p^\mu p^\nu} = \frac{b_{\mu\nu} q^\mu q^\nu}{a_{\mu\nu} q^\mu q^\nu}.$$

Chaque vecteur non asymptotique v^ν pouvant être présenté sous la forme $v^\nu = \varrho i^\nu$ ou i^ν est un vecteur-unité et $\varrho = \sqrt{a_{\mu\nu} v^\mu v^\nu}$ est un facteur scalaire de proportionnalité, la dernière relation subsistera aussi pour deux vecteurs arbitraires p^μ et q^μ non asymptotiques. Envisageons maintenant un vecteur non asymptotique p^μ. Tout vecteur q^μ qui diffère suffisamment peu de p^μ est aussi non asymptotique. De la dernière relation résulte donc pour tous les vecteurs q^μ qui diffèrent suffisamment peu de p^μ l'identité:

$$\frac{b_{\mu\nu} q^\mu q^\nu}{a_{\mu\nu} q^\mu q^\nu} = \lambda,$$

où le scalaire λ ne dépend pas du vecteur q^μ.

Nous obtiendrons de là que:

$$(b_{\mu\nu} - \lambda a_{\mu\nu}) q^\mu q^\nu = 0$$

ou bien que:

$$b_{\mu\nu} - \lambda a_{\mu\nu} = 0$$

c'est à dire que

$$b_{\mu\nu}=\lambda a_{\mu\nu}$$

ce que nous voulions montrer.

La suffisance. En supposant la relation (2.12) équivalente à (2.11), nous obtenons de l'équation (2.8) que

$$K-2K_{\mu\lambda}a'^{\mu\lambda}=0 \tag{2.15}$$

ce qui doit avoir lieu pour une m-direction non singulière arbitraire.

Envisageons maintenant deux m-directions non singulières ayant une $(m-1)$-direction commune. Les tenseurs métriques correspondants $\bar{a}'^{\lambda\varkappa}$ et $\bar{\bar{a}}'^{\lambda\varkappa}$ peuvent alors être présentés de manière suivante[23]):

$$\begin{aligned} \bar{a}'^{\lambda\varkappa}&=b^{\lambda\varkappa}+\underset{p}{\varepsilon}\, p^{\lambda}p^{\varkappa}; & \underset{p}{\varepsilon}&=p^{\lambda}p_{\lambda}=\pm 1 \\ \bar{\bar{a}}'^{\lambda\varkappa}&=b^{\lambda\varkappa}+\underset{q}{\varepsilon}\, q^{\lambda}q^{\varkappa}; & \underset{q}{\varepsilon}&=q^{\lambda}q_{\lambda}=\pm 1 \end{aligned} \tag{2.16}$$

où p^{λ} et q^{λ} sont deux vecteurs-unités arbitraires perpendiculaires à la $(m-1)$-direction commune et $b^{\lambda\varkappa}$ désigne le tenseur métrique correspondant à cette $(m-1)$-direction commune. L'équation a lieu pour $\bar{a}'^{\lambda\varkappa}$ et $\bar{\bar{a}}'^{\lambda\varkappa}$ et on obtient les relations:

$$K-2K_{\mu\lambda}b^{\mu\lambda}-2\underset{p}{\varepsilon}K_{\mu\lambda}p^{\mu}p^{\lambda}=0;$$

$$K-2K_{\mu\lambda}b^{\mu\lambda}-2\underset{q}{\varepsilon}K_{\mu\lambda}q^{\mu}q^{\lambda}=0.$$

La soustraction de ces deux dernières équations nous donne la relation:

$$\underset{p}{\varepsilon}K_{\mu\lambda}p^{\mu}p^{\lambda}=\underset{q}{\varepsilon}K_{\mu\lambda}q^{\mu}q^{\lambda},$$

qui a lieu, comme cela résulte de notre raisonnement, pour vecteures-unités p_{λ} et q_{λ} arbitraires. Le lemme démontré nous donne que

$$K_{\mu\lambda}=\lambda a_{\mu\lambda}$$

c'est à dire que l'espace envisagé est un espace einsteinien. La suffisance de notre condition est ainsi démontrée.

---

[23]) Voir (1.37).

§ 2. Corollaires pour l'espace E_4.

Dans le cas de l'espace à quatre dimensions la proposition du § précédant peut être énoncée sous une forme différente. Dans ce cas $m=2$. Envisageons donc les courbures scalaires de deux bi-directions perpendiculaires entre elles. La courbure scalaire d'une bi-direction est en même temps la mésure de courbure riemannienne; nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

L'équation einsteinienne (1.46) *n'a lieu dans V_4 que si dans chaque point deux bi-directions rectangulaires non singulières quelconques possèdent les mésures riemanniennes de courbure égales entre elles.*

De cette proposition résulte d'une manière naturelle et simple la proposition suivante:

Proposition 2. *L'équation einsteinienne*

$$K_{\mu\nu}=\lambda a_{\mu\nu}$$

est équivalente à l'équation

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa}=\frac{\mathfrak{a}}{4}\,K^{\varrho\sigma\omega\tau}\,\mathfrak{n}_{\varrho\sigma\nu\mu}\,\mathfrak{n}_{\omega\tau\lambda\varkappa},$$

que l'on trouve chez SIBATA [24]) et qui a déduit cette équivalence par une voie directe assez compliquée.

Démonstration. Dans le cas de l'espace à quatre dimensions, nous pouvons donner une autre forme à l'expression (2.4) de la courbure scalaire de la bi-direction. Désignons pour cela par $f'^{\lambda\mu}$ le bi-vecteur-unité [25]) déterminé par l'une des bi-directions envisagées et par $a'^{\lambda\mu}$ le tenseur métrique correspondant. On aura dans ce cas:

$$f'^{\nu\mu}=2\,\underset{1}{i}^{[\nu}\,\underset{2}{i}^{\mu]} \tag{2.17}$$

et

$$a'^{\nu\mu}=\underset{1}{\varepsilon}\,\underset{1}{i}^{\nu}\,\underset{1}{i}^{\mu}+\underset{2}{\varepsilon}\,\underset{2}{i}^{\nu}\,\underset{2}{i}^{\mu} \tag{2.18}$$

---

[24]) Wave Geometry, Nr. 25, J. Sc. Hiroshima Univ. 8, 63, 1938.

[25]) Voir chap. I, p. 38.

où $\underset{1}{i}^{\nu}$ et $\underset{2}{i}^{\nu}$ sont deux vecteurs-unités perpendiculaires mutuellement dans la bi-direction donnée. Des relations (2.18) et (2.17) nous obtenons:

$$(2.19) \qquad a'^{[\nu[\varkappa} a'^{\mu]\lambda]} = \underset{1}{\varepsilon} \underset{2}{\varepsilon} \underset{1}{i}^{[\nu} \underset{2}{i}^{\mu]} \underset{1}{i}^{[\varkappa} \underset{2}{i}^{\lambda]} + \underset{1}{\varepsilon} \underset{2}{\varepsilon} \underset{1}{i}^{[\mu} \underset{2}{i}^{\nu]} \underset{1}{i}^{[\lambda} \underset{2}{i}^{\varkappa]} = 2 \underset{1}{\varepsilon} \underset{2}{\varepsilon} f'^{\nu\mu} f'^{\varkappa\lambda}.$$

L'affineur de courbure $K_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ qui figure dans le second membre de la formule (2.4) étant alterné symétrique par rapport aux indices ν, μ et aussi $\lambda, \varkappa$, dans le produit qui s'y trouve — $a'^{\nu\varkappa} a'^{\mu\lambda}$ n'est donc importante que sa partie symétrique alternée relative à ces mêmes indices. La formule (2.4) peut donc être écrite aussi sous la forme:

$$(2.20) \qquad 2\varkappa' = K' = K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a'^{[\nu[\varkappa} a'^{\mu]\lambda]}.$$

En utilisant la relation (2.19), nous obtenons encore.

$$(2.21) \qquad \varkappa' = -\frac{\epsilon'}{4} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} f'^{\nu\mu} f'^{\lambda\varkappa},$$

où $\epsilon' = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ est égal $+1$ si le tenseur $a'^{\lambda\varkappa}$, envisagé comme une grandeur de sous-espace correspondant V_2 est défini et -1 dans le cas contraire. La formule (2.21) n'est qu'une forme usagée de la définition de la mésure riemanienne de courbure d'une bi-direction [26]).

Choisissons dans la bi-direction perpenduculaire à la bi-direction envisagée précédemment au point donnée deux vecteur-unités $\underset{3}{i}^{\lambda}$ et $\underset{4}{i}^{\lambda}$ perpendiculaires entre eux. Le système des vecteurs $\underset{1}{i}^{\lambda}, \underset{2}{i}^{\lambda}, \underset{3}{i}^{\lambda}, \underset{4}{i}^{\lambda}$ détermine dans l'espace à quatre dimensions envisagé un certain système de référence rectangulaire. En désignant par $f''^{\nu\mu}$ le bivecteur-unité de la seconde bi-direction on aura:

$$(2.22) \qquad f''^{\nu\mu} = 2 \underset{3}{i}^{[\nu} \underset{4}{i}^{\mu]}$$

et parsuite

$$(2.23) \qquad \varkappa'' = -\frac{e''}{4} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} f''^{\nu\mu} f''^{\lambda\varkappa}$$

---

[26]) Sch. Str., I, 117; II, 134.

Nous pouvons écrire maintenant l'équation (2.12) sous la forme suivante:

(2.24) $$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} f'^{\nu\mu} f'^{\lambda\varkappa} = \varepsilon K_{\nu\mu\lambda\varkappa} f''^{\nu\mu} f''^{\lambda\varkappa}$$

où $e = e'e''$ est égal à $+1$ ou -1 suivant que l'indice du tenseur $a_{\mu\lambda}$ est pair ou impair.

Introduisons encore le *quadri*-vecteur-unité [27]) $I^{\lambda\mu\nu\varkappa}$ défini dans le système de référence rectangulaire (h) déterminé par les vecteurs-mésures $\underset{1}{i^\lambda}, \underset{2}{i^\lambda}, \underset{3}{i^\lambda}, \underset{4}{i^\lambda}$, par la formule

(2.25) $$I^{1234} \overset{(h)}{=} 1.$$

Dans tout autre système de référence rectangulaire (h') on aura $I^{1'2'3'4'} \overset{(h')}{=} \eta$, où η est égal au déterminant de la transformation permettant de passer du système (h) au (h'). Il est facile de montrer se basant sur les formules (1.26), que

(2.26) $$f''^{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2} I^{\varkappa\lambda\mu\nu} f'_{\mu\nu}.$$

La justesse de cette formule est manifeste dans le système de référence défini par les vecteurs $\underset{1}{i^\lambda}, \underset{2}{i^\lambda}, \underset{3}{i^\lambda}, \underset{4}{i^\lambda}$.

Le fait que les deux bi-directions rectangulaires envisagées possèdent les mêmes mésures riemanniennes de courbure peut être écrit, en tenant compte de (2.24) et (2.26), sous la forme:

(2.27) $$\left(K_{\nu\mu\lambda\varkappa} - \frac{\varepsilon}{4} K^{\varrho\sigma\omega\tau} I_{\varrho\sigma\nu\mu} I_{\omega\tau\lambda\varkappa}\right) f'^{\nu\mu} f'^{\lambda\varkappa} = 0.$$

La dernière équation est satisfaite identiquement par toute bi-direction, si

(2.28) $$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} - \frac{\varepsilon}{4} K^{\varrho\sigma\omega\tau} I_{\varrho\sigma\nu\mu} I_{\omega\tau\lambda\varkappa} = 0$$

et dans ce cas seulement.

Si l'on prend en considération le *quadri*-vecteur de densité à poids -1, $\mathfrak{n}_{\lambda\mu\nu\varkappa}$, on verra facilemant que pour les systèmes de référence rectangulaires ont lieu les relations:

(2.29) $$\mathfrak{n}_{ijkl} = \pm I_{ijkl}$$

[27]) Voir chap. I, p. 40, (1.26).

et

(2.30) $$\mathfrak{a} = |a_{ij}| = \varepsilon.$$

Dans les systémes rectangulaires l'équation (2.28) peut donc être mise sous la forme:

(2.31) $$K_{ijkl} = \tfrac{1}{4}\,\mathfrak{a}\,K^{mnsr}\mathfrak{n}_{mnij}\mathfrak{n}_{srkl}$$

$\mathfrak{a}$ étant une densité du poids 2 [28]), le membre droit de la dernière équation est un affineur.

Ainsi donc l'équation (2.28) est équivalente à l'équation:

(2.32) $$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = \frac{\mathfrak{a}}{4}K^{\varrho\sigma\omega\tau}\mathfrak{n}_{\varrho\sigma\nu\mu}\mathfrak{n}_{\omega\tau\lambda\varkappa}.$$

Il en résulte que la relation (2.32) n'est autre chose que la condition pour que toutes deux bi-directions rectangulaires aient les mêmes mésures riemanniennes et notre proposition 1 montre que la relation est aussi équivalente à l'équation d'EINSTEIN, (1.46).

§ 3. Espace E_n à un nombre quelconque de dimensions.

Si le nombre des dimensions n est quelconque nous avons la proposition suivante:

Proposition 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que $V_n (n > 2)$, soit E_n est que dans chaque point toutes les $(n-1)$-directions aient les memes courbures scalaires.*

Démonstration. Considérons dans un point arbitraire P de l'éspace V_n deux $(n-1)$-directions et désignons par $\overline{d}^{\mu\varkappa}$ et $\overline{\overline{d}}^{\mu\varkappa}$ leurs tenseurs métriques correspondants. Nous pouvons présenter ces tenseurs sous forme suivante

(2.33) $$\begin{aligned} \overline{d}^{\mu\varkappa} &= a^{\mu\varkappa} - \varepsilon \underset{p}{p^{\mu}} p^{\varkappa}; \qquad & \underset{p}{\varepsilon} &= p^{\mu} p_{\mu} = \pm 1; \\ \overline{\overline{d}}^{\mu\varkappa} &= a^{\mu\varkappa} - \varepsilon \underset{q}{q^{\mu}} q^{\varkappa}; \qquad & \underset{q}{\varepsilon} &= q^{\mu} q_{\mu} = \pm 1; \end{aligned}$$

où $a^{\mu\varkappa}$ est le tenseur métriques V_n et p^{λ}, q^{λ} désignent deux vecteurs-unités perpendiculaires à $(n-1)$-directions correspon-

---

[28]) Sch., Str., I, p. 54.

dantes. En désignant ensuite par $\overline{\varkappa}$ et $\overline{\overline{\varkappa}}$ les courbures scalaires des $(n-1)$-directions en question, on aura les relations:

$$\begin{aligned}
\overline{\varkappa} &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} \overline{d}^{\nu\varkappa} \overline{d}^{\mu\lambda} = \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)} (K - \underset{p}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a^{\nu\varkappa} p^{\mu} p^{\lambda} - \underset{p}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a^{\mu\lambda} p^{\nu} p^{\varkappa} + \\
&\qquad + K_{\nu\mu\lambda\varkappa} p^{\nu} p^{\varkappa} p^{\mu} p^{\lambda});
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\varkappa}} &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} \overline{\overline{d}}^{\nu\varkappa} \overline{\overline{d}}^{\mu\lambda} = \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)} (K - \underset{q}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a^{\nu\varkappa} q^{\mu} q^{\lambda} - \underset{q}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a^{\mu\lambda} q^{\nu} q^{\varkappa} + \\
&\qquad + K_{\nu\mu\lambda\varkappa} q^{\nu} q^{\varkappa} q^{\mu} q^{\lambda}).
\end{aligned}$$

En tenant compte dans le calcul des seconds membres des dernières formules des relations (1.31—1.3), nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\overline{\varkappa} &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} (K - 2 \underset{p}{\varepsilon} K_{\mu\lambda} p^{\mu} p^{\lambda}); \\
\overline{\overline{\varkappa}} &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} (K - 2 \underset{q}{\varepsilon} K_{\mu\lambda} q^{\mu} q^{\lambda}).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Si nous supposons maintenant que:

$$\overline{\varkappa} = \overline{\overline{\varkappa}} \tag{2.36}$$

Nous obtenons, en tenant compte des formules (2.35), la relation:

$$\underset{p}{\varepsilon} K_{\mu\lambda} p^{\mu} p^{\lambda} = \underset{q}{\varepsilon} K_{\mu\lambda} q^{\mu} q^{\lambda} \tag{2.37}$$

qui a lieu pour deux vecteurs-unités arbitraires p^{λ} et q^{λ}. Il en résulte [29]) que

$$K_{\mu\lambda} = \lambda a_{\mu\lambda} \tag{2.38}$$

c'est à dire que l'espace doit être einsteinien.

---

[29]) Voir chap. II, p. 51.

Réciproquement, si nous addmettons l'équation (2.38), dans ce cas, en prénant en considération les formules (2.35) (1.47 et (1.48), on obtient immédiatement que:

$$(2.39)\quad \overline{\varkappa}=\overline{\overline{\varkappa}}=\frac{1}{(n-1)\,(n-2)}(K-2\,\lambda)=\frac{1}{n(n-1)}K=\varkappa.$$

Toutes les $(n-1)$-directions ont donc dans chaque point de l'espace einsteinien la même courbure scalaire égale à la courbure scalaire de l'éspace donné E_n. La proposition est ainsi démontrée.

Nous donnerons encore une autre démonstration faite par M. GOŁĄB[30]).

Nous voulons auparavant rappeler la définition de la courbure moyenne de l'éspace V_n au point P dans la direction $\underset{1}{v}^{\lambda}$, que nous désignerons par ϱ_1. Représentons nous au point P un système de $(n-1)$ vecteurs $\underset{2}{v}^{\lambda},\underset{3}{v}^{\lambda},\ldots,\underset{n}{v}^{\lambda}$ tel que le système $\underset{1}{v}^{\lambda},\underset{2}{v}^{\lambda},\ldots,\underset{n}{v}^{\lambda}$ soit orthogonal et désignons par $\varkappa_{1i}$ la mésure riemannienne de courbure de la bi-direction determinée par les vecteurs $\underset{1}{v}^{\lambda}$ et $\underset{i}{v}^{\lambda}$.

Dans ce cas

$$\varrho_1=\sum_{i|2}^{n}\varkappa_{1i}.$$

On peut montrer que le scalaire ϱ_1, ainsi défini ne dépend pas du choix particulier du système $\underset{2}{v}^{\lambda},\underset{3}{v}^{\lambda},\ldots,\underset{n}{v}^{\lambda}$[31]).

Il existe la proposition suivante[32]):

La condition nécessairc et suffisante pour que le courbure moyenne au point arbitraire P ne dépende pas de la direction est que V_n — soit einsteinien c'est à dire E_n.

Partant de là, il est très facile de montrer la justesse de la proposition 3. En effet: si les vecteurs $\underset{i}{v}^{\lambda}$, $(i=1,2,\ldots,n)$,

---

[30]) M. Gołąb eût l'amabilité de me là communiquer dans sa lettre du 7. 10. 1941.

[31]) Eisenhart, Riemannien Geometry p. 113.

[32]) Eisenhart R. G. p. 114.

définissent un système orthogonal de référence arbitraire, on aura immédiatement la relation

$$\varkappa = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j|1}^{n} \varkappa_{ij},$$

où $\varkappa$ désigne la courbure scalaire de l'espace V_n. La dernière relation peut aussi être écrite sous la forme:

$$\varkappa(n-1)n = \varrho_i + (n-2)(n-1)\varkappa_i,$$

où ϱ_i est la courbure moyenne dans la direction $\underset{i}{v}^\lambda$ et $\varkappa_i$ est la courbure scalaire de la $(n-1)$-direction perpendiculaire au vecteur $\underset{i}{v}^\lambda$. La dernière formule montre que $\varkappa_i$ ne dépend pas du choix particulier de la $(n-1)$-direction que si ϱ_i est indépendant du choix de $\underset{i}{v}^\lambda$ au point P et dans ce cas seulement. La proposition 3 est maintenant une conséquence immédiate de la proposition d'EISENHART citée plus haut.

M. le professeur WAŻEWSKI a donné une autre généralisation de la proposition 1 pour le cas d'un espace à un nombre quelconque des dimensions.

Envisageons dans un point arbitraire de V_n une certaine m-direction non singulière et désignons par $\overline{\varkappa}$ sa courbure scalaire ainsi qu'une $(n-m)$-direction perpendiculaire à celle ci ayant une courbure scalaire $\overline{\overline{\varkappa}}$.

Proposition 4. *Pour que l'éspace V_n soit einsteinien E_n il faut et il suffit qu'en tout point la différence $n(n-1)\overline{\varkappa} - (n-m)(n-m-1)\overline{\overline{\varkappa}}$ soit indépendante du choix spécial de la m-direction envisagée.*

Cette différence est égale notamment à $(n-1)(2m-n)\varkappa$ où $\varkappa$ est la courbure scalaire de V_n.

La démonstration de cette proposition est tout à fait analogue à celle de la proposition 1.

Chapitre 3

Conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace soit conformément euclidien

§ 1. Espaces conformément euclidiens à un nombre pair de dimensions, C_{2m}.

Dans ce § nous démontrerons deux propositions qui se rapportent à certaines propriétés de la courbure scalaire de p-directions correspondantes. Ces propriétés caractérisent l'éspace conformément euclidien à un nombre pair de dimensions C_{2m}.

Proposition 5. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace riemannien à un nombre pair des dimensions V_{2m} soit pour $m \geqslant 2$ conformément euclidien est que dans chaque point la somme des mésures riemanniennes de courbure du système des m bi-directions non singulières mutuellement perpendiculaires ne dépende pas du choix spécial du système.*

La somme des mésures riemanniennes de courbure, dont il est question dans cette proposition, est égale, comme on le verra, à $m\varkappa$ ou $\varkappa$ désigne la courbure scalaire de l'espace envisagé.

Démonstration. Choisissons un système arbitraire des $2m$ vecteurs-unités mutuellement perpendiculaires: $\underset{1}{i^\lambda}, \underset{2}{i^\lambda}, \ldots, \underset{2m}{i^\lambda}$ et considérons m bi-directions définies par les bi-vecteurs-unités.

$$(3.1) \qquad 2\,\underset{1}{i}^{[\lambda}\underset{2}{i}^{\varkappa]},\ 2\,\underset{3}{i}^{[\lambda}\underset{4}{i}^{\varkappa]}, \ldots, 2\,\underset{2m-1}{i}^{[\lambda}\underset{2m}{i}^{\varkappa]}.$$

Ces bi-directions sont, comme cela résulte de leurs définitions, mutuellement perpendiculaires entre elles. En désignant par k la somme des mésures riemanniennes de courbure de ce système des bi-directions, nous obtenons, en tenant compte de (2.21), que

$$(3.2) \qquad \begin{aligned} k = &- \underset{12}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} \underset{1}{i}^{\nu} \underset{2}{i}^{\mu} \underset{1}{i}^{\lambda} \underset{2}{i}^{\varkappa} - \underset{34}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} \underset{3}{i}^{\nu} \underset{4}{i}^{\mu} \underset{3}{i}^{\lambda} \underset{4}{i}^{\varkappa} - \\ &- \underset{56}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} \underset{5}{i}^{\nu} \underset{6}{i}^{\mu} \underset{5}{i}^{\lambda} \underset{6}{i}^{\varkappa} - \ldots - \underset{2m-1,2m}{\varepsilon} K \underset{2m-1}{i^{\nu}} \underset{2m}{i^{\mu}} \underset{2m-1}{i^{\lambda}} \underset{2m}{i^{\varkappa}}, \end{aligned}$$

où

$$(3.3) \qquad \underset{jl}{\varepsilon} = \underset{j}{\varepsilon}\,\underset{l}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \underset{j}{\varepsilon} = \underset{j}{i}^{\lambda}\,\underset{j}{i}_{\lambda} = \pm 1.$$

Dans la formule (3.2) nous écrivons $\underset{j}{i}^{\nu}\underset{l}{i}^{\mu}$ au lieu de $i^{[\nu}i^{\mu]}$, puisque l'affineur $K_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ est, en vertu de (1.31—1.3), alterné par rapport aux indices correspondants, et c'est uniquement la partie alternée du produit $\underset{j}{i}^{\nu}\underset{l}{i}^{\mu}$ qui joue un rôle dans cette formule. Dans un système rectangulaire de référence défini par les vecteurs $\underset{1}{i}^{\lambda}, \underset{2}{i}^{\lambda}, \ldots, \underset{n}{i}^{\lambda}$, $(n = 2m)$, la relation (3.2) prendra la forme suivante:

$$(3.4) \qquad -k = \underset{12}{\varepsilon} K_{1212} + \underset{34}{\varepsilon} K_{3434} + \underset{56}{\varepsilon} K_{5656} + \ldots$$

Introduisons un autre système des bi-directions mutuellement perpendiculaires defini par les bivecteurs-unités:

$$(3.5) \qquad 2\underset{1'}{i}^{[\lambda}\underset{2}{i}^{\varkappa]},\ 2\underset{3'}{i}^{[\lambda}\underset{4}{i}^{\varkappa]},\ 2\underset{5}{i}^{[\lambda}\underset{6}{i}^{\varkappa]}, \ldots,\ 2\underset{2m-1}{i}^{\lambda]}\ \underset{2m}{i}^{\varkappa]},$$

où d'ailleurs:

$$(3.6) \qquad \begin{aligned} \underset{1'}{i}^{\varkappa} &= \alpha \underset{1}{i}^{\varkappa} + \beta \underset{3}{i}^{\varkappa}; \\ \underset{3'}{i}^{\varkappa} &= \underset{1}{\varepsilon} \beta \underset{1}{i}^{\varkappa} - \underset{3}{\varepsilon} \alpha \underset{3}{i}^{\varkappa}; \end{aligned} \qquad \alpha^2 + \beta^2 \underset{1}{\varepsilon}\underset{3}{\varepsilon} = 1$$

et d'où il s'ensuit que

$$(3.7) \qquad \underset{1'}{\varepsilon} = \underset{1}{\varepsilon} \text{ et } \underset{3'}{\varepsilon} = \underset{3}{\varepsilon}.$$

Si l'on suppose maintenant que la somme des mésures riemanniennes de courbure des m bi-directions mutuellement perpendiculaires ne dépend pas du choix spécial de se système, on obtiendra également

$$(3.8) \qquad \begin{aligned} -k = {} & \underset{12}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa}(\alpha \underset{1}{i}^{\nu} + \beta \underset{3}{i}^{\nu}) \underset{2}{i}^{\mu} (\alpha \underset{1}{i}^{\lambda} + \beta \underset{3}{i}^{\lambda}) \underset{2}{i}^{\varkappa} + \\ & + \underset{34}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} (\underset{1}{\varepsilon} \beta \underset{1}{i}^{\nu} - \underset{3}{\varepsilon} \alpha \underset{3}{i}^{\nu}) \underset{4}{i}^{\mu} (\beta \underset{1}{\varepsilon} \underset{1}{i}^{\lambda} - \alpha \underset{3}{\varepsilon} \underset{3}{i}^{\lambda}) \underset{4}{i}^{\varkappa} + K_{\nu\mu\varkappa\varkappa} \underset{5}{i}^{\nu} \underset{6}{i}^{\mu} \underset{5}{i}^{\lambda} \underset{6}{i}^{\varkappa} + \ldots . \end{aligned}$$

De là, en prenant en considération la relation $\alpha^2 + \beta^2 \underset{1}{\varepsilon}\underset{3}{\varepsilon} = 1$, nous obtenons

$$(3.9) \qquad \begin{aligned} -k = {} & \alpha^2 [\underset{12}{\varepsilon} K_{1212} + \underset{34}{\varepsilon} K_{3434} + \underset{56}{\varepsilon} K_{5656} + \ldots] + \\ & + \beta^2 \underset{13}{\varepsilon} [\underset{23}{\varepsilon} K_{2323} + \underset{14}{\varepsilon} K_{1414} + \underset{56}{\varepsilon} K_{5656} + \ldots] + \\ & + 2 \underset{1}{\varepsilon} \alpha \beta [\underset{2}{\varepsilon} K_{1232} - \underset{4}{\varepsilon} K_{1434}]. \end{aligned}$$

En vertu de la relation (3.4) et d'une relation analogue que l'on obtient en envisageant les bi-directions définies par les bivecteurs simples,

$$2\,\underset{2}{i}{}^{[\varkappa}\underset{3}{i}{}^{\lambda]},\; 2\,\underset{1}{i}{}^{[\varkappa}\underset{4}{i}{}^{\lambda]},\; 2\,\underset{5}{i}{}^{[\varkappa}\underset{6}{i}{}^{\lambda]},\ldots,\quad 2\,\underset{2m-1}{i}{}^{[\varkappa}\;\underset{2m}{i}{}^{\lambda]},$$

la dernière égalité prendra la forme:

$$(3.10)\qquad -k = -(\alpha^2+\underset{13}{\varepsilon\,\beta^2})k + 2\,\underset{1}{\varepsilon}\,\alpha\,\beta\,[\underset{2}{\varepsilon}K_{12\,32}-\underset{4}{\varepsilon}K_{14\,34}].$$

Si l'on utilise (3.6), nous aurons encore:

$$(3.11)\qquad \underset{2}{\varepsilon}K_{12\,32}=\underset{4}{\varepsilon}K_{14\,34}.$$

La dernière formule peut être récrite ainsi:

$$(3.12)\qquad \underset{2}{\varepsilon}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\underset{1}{i}{}^{\nu}\underset{2}{i}{}^{\mu}\underset{3}{i}{}^{\lambda}\underset{2}{i}{}^{\varkappa}=\underset{4}{\varepsilon}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\underset{1}{i}{}^{\nu}\underset{4}{i}{}^{\mu}\underset{3}{i}{}^{\lambda}\underset{4}{i}{}^{\varkappa}.$$

Substituons dans (3.12) en place du système $\underset{1}{i}{}^{\lambda}, \underset{2}{i}{}^{\lambda}, \underset{3}{i}{}^{\lambda}, \underset{4}{i}{}^{\lambda}$ des 4 vecteurs-unités mutuellement perpendiculaires, un autre système ayant les mêmes propriétés, notamment le système

$$(3.13)\qquad \underset{1}{i}{}^{\lambda},\; \gamma\underset{2}{i}{}^{\lambda}+\delta\underset{4}{i}{}^{\lambda},\; \underset{3}{i}{}^{\lambda},\; \delta\underset{2}{\varepsilon}\underset{2}{i}{}^{\lambda}-\gamma\underset{4}{\varepsilon}\underset{4}{i}{}^{\lambda},$$

où

$$(3.14)\qquad \gamma^2+\delta^2\underset{2}{\varepsilon}\underset{4}{\varepsilon}=1.$$

On obtiendra alors

$$(3.15)\qquad \begin{aligned}&\underset{2}{\varepsilon}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\underset{1}{i}{}^{\nu}(\gamma\underset{2}{i}{}^{\mu}+\delta\underset{4}{i}{}^{\mu})\underset{3}{i}{}^{\lambda}(\gamma\underset{2}{i}{}^{\varkappa}+\delta\underset{4}{i}{}^{\varkappa})=\\ &=\underset{4}{\varepsilon}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\underset{1}{i}{}^{\nu}(\delta\underset{2}{\varepsilon}\underset{2}{i}{}^{\mu}-\gamma\underset{4}{\varepsilon}\underset{4}{i}{}^{\mu})\underset{3}{i}{}^{\lambda}(\delta\underset{2}{\varepsilon}\underset{2}{i}{}^{\varkappa}-\gamma\underset{4}{\varepsilon}\underset{4}{i}{}^{\varkappa})\end{aligned}$$

et encore:

$$(3.16)\qquad \begin{aligned}&\underset{2}{\varepsilon}\gamma^2K_{12\,32}+\underset{2}{\varepsilon}\gamma\,\delta\,K_{14\,32}+\underset{2}{\varepsilon}\gamma\,\delta\,K_{12\,34}+\underset{2}{\varepsilon}\delta^2K_{14\,34}=\\ &=\underset{4}{\varepsilon}\delta^2K_{12\,32}-\underset{2}{\varepsilon}\gamma\,\delta\,K_{14\,32}-\underset{2}{\varepsilon}\gamma\,\delta\,K_{12\,34}+\underset{4}{\varepsilon}\gamma^2K_{14\,34}.\end{aligned}$$

En vertu de la relation (3.11), la première expression du premier membre de (3.16) et la dernière expression du second

membre peuvent être supprimées. Il en est de même de la dernière expression du premier et de la première expression du second membre. Nous obtiendrons après ces réductions

(3.17) $$2\underset{2}{\varepsilon}\gamma\delta(K_{1432}+K_{1234})=0$$

et parsuite:

(3.18) $$K_{1432}+K_{1234}=0.$$

En appliquant à la formule (3.2) une transformation du système des vecteurs $\underset{1}{i^\lambda}, \underset{4}{i^\lambda}$ analogue à (3.6) on parvient à la relation

(3.19) $$\underset{2}{\varepsilon} K_{1242}=\underset{3}{\varepsilon} K_{1343}$$

et de là, par une transformation analogue à (3.13), l'égalité

(3.20) $$K_{1243}+K_{1342}=0.$$

En soustrayant membre à membre les égalités (3.18) et (3.20) et en tenant compte de l'identité:

(3.21) $$K_{\nu[\mu\lambda\varkappa]}=0$$

qui résulte directement de (1.31—2.4), nous obtenons:

(3.22) $$3K_{1234}-K_{1234}-K_{1423}-K_{1342}=3K_{1234}=0.$$

On peut démontrer pareillement la disparition de toutes les autres composantes de l'affineur $K_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ à quatre indices inégaux dans le système de référence défini par les vecteurs $\underset{1}{i^\lambda}, \underset{2}{i^\lambda}, \ldots, \underset{2m}{i^\lambda}$, c'est à dire dans un système rectangulaire arbitraire de référence. En vertu de la proposition citée [33]), l'espace envisagé est donc un espace C_{2m}. Nous avons ainsi prouvé la première partie de la proposition.

Supposons maintenant que l'espace soit conformément euclidien c'est à dire que l'on ait les relations (1.51) et (1.53), car $n \geqslant 4$. Dans ce cas la mésure riemannienne de courbure de la bi-direction définie par le bivecteur $2\underset{1}{i}^{[\lambda}\underset{2}{i}^{\varkappa]}$ est donnée

---

[33]) Voir chap. I, p. 48.

dans le système rectangulaire de référence considéré par la formule:

$$(3.23)\quad \begin{aligned} -\underset{12}{\varepsilon}K_{1212} &= -\underset{12}{\varepsilon}\frac{1}{n-2}(a_{11}L_{22}+a_{22}L_{11}) = \\ &= -\underset{12}{\varepsilon}\frac{1}{n-2}(\underset{1}{\varepsilon}L_{22}+\underset{2}{\varepsilon}L_{11}) = \\ &= \frac{-1}{n-2}(\underset{2}{\varepsilon}L_{22}+\underset{1}{\varepsilon}L_{11}) = \\ &= \frac{-1}{n-2}(L_{2}^{\cdot 2}+L_{1}^{\cdot 1}). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant, en nous servant de cette dernière relation et des relations analogues, calculer k de la formule (3.4). Nous avons notamment:

$$(3.24)\quad \begin{aligned} k &= \frac{-1}{n-2}L_{\varkappa}^{\cdot\varkappa} \\ &= \frac{-1}{n-2}\left(-K+\frac{n}{2(n-1)}K\right) = \\ &= \frac{1}{2(n-1)}K, \end{aligned}$$

et ensuite, en vertu de (1.36), puisque $n=2m$:

$$(3.25)\quad k = m\varkappa\,.$$

Nous voyons que la somme des mésures riemanniennes de courbure du système des m bi-directions mutuellement rectangulaires est égale à $m\varkappa$ c'est à dire ne dépend pas du choix spécial de ce système. La seconde partie de la proposition se trouve ainsi également démontrée.

Passons maintenant à l'autre proposition que nous avons mentionnée au début de ce §.

Proposition 6. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace V_{2m} soit C_{2m} est que le somme des courbures scalaires des deux m-directions arbitraires mutuellement rectangulaires et non singulières soit indépendante dans chaque point du choix de ces deux m-directions.*

Nous allons montrer dans la suite que cette somme dans le cas en question est égale à $2\varkappa$.

Démonstration. Nous n'allons pas envisager le cas particulier de $m=2$ car dans ce cas on a affaire à la somme des mésures riemanniennes de courbure du système de deux bi-directions mutuellement rectangulaires. Ce cas fût déjà pris en considération au cours de la démonstration de la proposition 5.

Si $m>2$, pour prouver la suffisance de notre condition, il suffit de montrer que pour chaque groupe de quatre vecteurs-unités mutuellement rectangulaires $r^{\varkappa}$, $s^{\varkappa}$, $u^{\varkappa}$, $v^{\varkappa}$ on a la relation

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} r^{\mu} s^{\lambda} u^{\nu} v^{\varkappa} = 0. \tag{3.26}$$

Si l'on envisage, en effet, un système rectangulaire de référence arbitraire et si l'on substitue dans (3.26) en place de $r^{\varkappa}$, $s^{\varkappa}$, $u^{\varkappa}$, $v^{\varkappa}$ quatre vecteurs-mésures quelconques de se système, on constate le fait que les composantes de l'affineur de courbure $K_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ à quatre indices inégaux disparaissent pour le système de référence rectangulaire envisagé et parsuite pour tout autre système rectangulaire. Il s'ensuit, que l'espace envisagé est conformément euclidien, ce que nous voulons précisément montrer.

Remarquons que la relation (2.8) nous donne la formule suivante pour la somme des courbures scalaires de deux m-directions rectangulaires

$$\begin{aligned} \varkappa' + \varkappa'' &= \frac{1}{m(m-1)} (K' + K'') = \\ &= \frac{1}{m(m-1)} (K - 2K_{\mu\lambda} a'^{\mu\lambda} + 2K'). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Si cette somme doit être la même pour chaque couple de m-directions rectangulaires, l'expression (3.27) doit être indépendante du choix de $a'^{\mu\lambda}$. Calculons la somme considérée pour $\bar{a}'^{\mu\lambda}$ et $\bar{\bar{a}}'^{\mu\lambda}$ donnée par la formule (2.16) et égalons entre eux les expressions obtenues. Nous aurons la relation:

$$\begin{aligned} &K - 2K_{\mu\lambda} b^{\mu\lambda} - 2\underset{p}{\varepsilon} K_{\mu\lambda} \dot{p}^{\mu} p^{\lambda} + \\ &+ 2K_{\nu\mu\lambda\varkappa} b^{\nu\varkappa} b^{\mu\lambda} + 4\underset{p}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} b^{\nu\varkappa} p^{\mu} p^{\lambda} + 2K_{\nu\mu\lambda\varkappa} p^{\nu} p^{\varkappa} p^{\mu} p^{\lambda} = \\ &= K - 2K_{\mu\lambda} b^{\mu\lambda} - 2\underset{q}{\varepsilon} K_{\mu\lambda} q^{\mu} q^{\lambda} + \\ &+ 2K_{\nu\mu\lambda\varkappa} b^{\nu\varkappa} b^{\mu\lambda} + 4\underset{q}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} b^{\nu\varkappa} q^{\mu} q^{\lambda} + 2K_{\nu\mu\lambda\varkappa} q^{\nu} q^{\varkappa} q^{\mu} q^{\lambda}. \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que dans la formule obtenue les dernières expressions de deux membres s'annulent en vertu de (1.31). Si l'on effectue ensuite la réduction, on obtient que

$$(3.28)\qquad \underset{p}{\varepsilon}(2K_{\nu\mu\lambda\varkappa}b^{\nu\varkappa}-K_{\mu\lambda})p^{\mu}p^{\lambda}=\underset{q}{\varepsilon}(2K_{\nu\mu\lambda\varkappa}b^{\nu\varkappa}-K_{\mu\lambda})q^{\mu}q^{\lambda},$$

où $b^{\nu\varkappa}$ est le tenseur métrique correspondant à une $(m-1)$-direction arbitraire et $p^{\varkappa}$ et $q^{\varkappa}$ désignent deux vecteurs-unités arbitraires perpendiculaires à la $(m-1)$-direction considérée, De là, en vertu de la proposition démontrée [34]), résulte que la composante de la grandeur $K_{\nu\mu\lambda\varkappa}b^{\nu\varkappa}-K_{\mu\lambda}$ dans la $(n-m+1)$-direction perpendiculaire à la $(m-1)$-direction donnée doit être proportionelle au tenseur métrique correspondant à cette $(n-m+1)$-direction. Il s'ensuit qu'on aura la relation

$$(3.29)\qquad 2K_{\nu\mu\lambda\varkappa}b^{\nu\varkappa}r^{\mu}s^{\lambda}-K_{\mu\lambda}r^{\mu}s^{\lambda}=0$$

où r^{μ} et s^{λ} sont deux vecteurs perpendiculaires entre eux et à la $(m-1)$-direction donnée.

Envisageons maintenant deux $(m-1)$-directions perpendiculaires aux vecteurs $r^{\varkappa}$ et $s^{\varkappa}$ et qui possèdent une $(m-2)$-direction commune, ce qui est possible, puisque $m>2$. Les tenseurs métriques $\overline{b}^{\lambda\mu}$ et $\overline{\overline{b}}^{\lambda\mu}$ qui leurs correspondent peuvent être écrits sous la forme

$$(3.30)\qquad \begin{aligned} \overline{b}^{\lambda\mu}&=c^{\lambda\mu}+\underset{m}{\varepsilon}m^{\lambda}m^{\mu}; &\quad \underset{m}{\varepsilon}&=m^{\lambda}m_{\lambda}=\pm1;\\ \overline{\overline{b}}^{\lambda\mu}&=c^{\lambda\mu}+\underset{n}{\varepsilon}n^{\lambda}n^{\mu}; &\quad \underset{n}{\varepsilon}&=n^{\lambda}n_{\lambda}=\pm1,\end{aligned}$$

où $c^{\lambda\mu}$ est le tenseur métrique correspondant à la $(m-2)$-direction commune et $m^{\varkappa}$ et $n^{\varkappa}$ sont deux vecteurs-unités perpendiculaires à la $(m-2)$-direction envisagée et aux vecteurs $r^{\varkappa}$ et $s^{\varkappa}$.

Si l'on substitue dans la relation (3.29) en place de $b^{\mu\lambda}$ tour à tour $\overline{b}^{\mu\lambda}$ et $\overline{\overline{b}}^{\mu\lambda}$, on obtient l équation suivante:

$$(3.31)\qquad \begin{aligned} &2K_{\nu\mu\lambda\varkappa}c^{\nu\varkappa}r^{\mu}s^{\lambda}+2\underset{m}{\varepsilon}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}m^{\nu}m^{\varkappa}r^{\mu}s^{\lambda}-K_{\mu\lambda}r^{\mu}s^{\lambda}=0;\\ &2K_{\nu\mu\lambda\varkappa}c^{\nu\varkappa}r^{\mu}s^{\lambda}+2\underset{n}{\varepsilon}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}n^{\nu}n^{\varkappa}r^{\mu}s^{\lambda}-K_{\mu\lambda}r^{\mu}s^{\lambda}=0.\end{aligned}$$

---

[34]) Voir chap. II, p. 51.

En soustrayant membre à membre les deux dernières équations, nous obtiendrons la relation:

$$\underset{m}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} r^{\mu} s^{\lambda} m^{\nu} m^{\varkappa} = \underset{n}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} r^{\mu} s^{\lambda} n^{\nu} n^{\varkappa}.$$

Il est facile de voir que dans la dernière relation c'est uniquement la partie symétrique de l'affineur de courbure relative aux indices ν et $\varkappa$ qui joue un rôle. Nous pouvons donc l'écrire sous la forme:

(3.32) $$\underset{m}{\varepsilon} K_{(\nu|\mu\lambda|\varkappa)} r^{\mu} s^{\lambda} m^{\nu} m^{\varkappa} = \underset{n}{\varepsilon} K_{(\nu|\mu\lambda|\varkappa)} r^{\mu} s^{\lambda} n^{\nu} n^{\varkappa}.$$

Si l'on fait maintenant un raisonnement analoque à celui que nous avons fait pour obtenir (3.29), on parvient à l'équation:

(3.33) $$K_{(\nu|\mu\lambda|\varkappa)} r^{\mu} s^{\lambda} u^{\nu} v^{\varkappa} = 0$$

où r^{μ}, s^{μ}, u^{μ}, v^{μ} désignent 4 vecteurs-unites arbitraires mutuellement perpendiculaires entre eux. En intervertissant entre eux les vecteurs s^{λ} et v^{λ} dans la formule (3.33) nous obtènons la relation

(3.34) $$K_{(\nu|\mu\varkappa|\lambda)} r^{\mu} s^{\lambda} u^{\nu} v^{\varkappa} = 0.$$

La soustraction membre à membre de deux dernières équations conduit à la formule

(3.35) $$\tfrac{1}{2}(K_{\nu\mu\lambda\varkappa} + K_{\varkappa\mu\lambda\nu} - K_{\nu\mu\varkappa\lambda} - K_{\lambda\mu\varkappa\nu}) r^{\mu} s^{\lambda} u^{\nu} v^{\varkappa} = 0$$

laquelle, si l'on applique les relations (1.31—1.2) ainsi que (1.11), donne:

(3.36) $$\tfrac{3}{2} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} r^{\mu} s^{\lambda} u^{\nu} v^{\varkappa} = 0.$$

Réciproquement, si nous admettons que l'éspace considéré soit C_{2m}, c'est à dire l'existence des relations (1.51) et (1.53), on aura, en portant de (3.27) la somme $\varkappa' + \varkappa''$ des courbures scalaires de deux m-directions perpendiculaires, la formule suivante:

(3.37) $$\varkappa' + \varkappa'' = \frac{1}{m(m-1)}\Big(K - 2K_{\mu\lambda} a'^{\mu\lambda} + \\ + \frac{4}{m-1} a_{[\nu[\lambda} L_{\mu]\varkappa]} a'^{\mu\lambda} a'^{\nu\varkappa}\Big).$$

Calculons à part la dernière expression entre crochets de cette relation. Nous avons, notamment, à cause de (1.10)

$$(3.38)\qquad a_{[\nu[\lambda}L_{\mu]\varkappa]}\,a'^{\nu\varkappa}a'^{\mu\lambda}=\tfrac{1}{4}[a_{\nu\lambda}L_{\mu\varkappa}-a_{\mu\lambda}L_{\nu\varkappa}- -a_{\nu\varkappa}L_{\mu\lambda}+a_{\mu\varkappa}L_{\nu\lambda}]\,a'^{\mu\lambda}a'^{\nu\varkappa}.$$

Il résulte cependant des relations (1.37) et (1.41) que

$$(3.39)\qquad a_{\nu\lambda}a'^{\mu\lambda}=B^{\mu}_{\nu}.$$

Si l'on tient compte du fait que $a'^{\nu\varkappa}$ est une grandeur de sous-éspace correspondant dans V_{2m} on aura encore:

$$(3.40)\qquad a_{\nu\lambda}a'^{\mu\lambda}a'^{\nu\varkappa}=a'^{\mu\varkappa}.$$

En appliquant à la relation (3.38) les deux dernières formules ainsi que (2.3) et (1.51) nous obtenons:

$$a_{[\nu[\lambda}L_{\mu]\varkappa]}\,a'^{\mu\lambda}a'^{\nu\varkappa}=\tfrac{1}{4}[L_{\mu\varkappa}a'^{\mu\varkappa}-mL_{\nu\varkappa}a'^{\nu\varkappa}-mL_{\mu\lambda}a'^{\mu\lambda}+L_{\nu\lambda}a'^{\nu\lambda}]= =\frac{1-m}{2}L_{\mu\varkappa}a'^{\mu\varkappa}=\frac{m-1}{2}K_{\mu\varkappa}a'^{\mu\varkappa}-\frac{m(m-1)}{4(2m-1)}K.$$

L'expression (3.37) aura donc maintenant la forme:

$$(3.41)\qquad \varkappa'+\varkappa''=\frac{1}{m(m-1)}\Big[K-2K_{\mu\lambda}a'^{\mu\lambda}+ +2K_{\mu\lambda}a'^{\mu\lambda}-\frac{m}{2m-1}K\Big]=\frac{K}{m(2m-1)}=2\varkappa.$$

La somme des courbures scalaires du système de deux m-directions perpendiculaires dans l'espace C_{2m} ne dépend donc pas du choix spécial du système. La seconde partie de notre proposition est ainsi démontrée.

§ 2. Espace C_4.

Les considérations du § précédent nous permettent d'obtenir les propositions nouvelles qui caractérisent l'espace conformément euclidien à quatre dimensions, notamment:

Proposition 7. La condition nécessaire et suffisante pour que V_4 soit conformément euclidien est que l'on ait l'identité

$$(3.42)\qquad K_{\nu\mu\lambda\varkappa}+\tfrac{1}{4}\mathfrak{a}K^{\varrho\sigma\omega\tau}\mathfrak{n}_{\varrho\sigma\nu\mu}\mathfrak{n}_{\omega\tau\lambda\varkappa}+4\varkappa a_{[\nu[\lambda}a_{\mu]\varkappa]}=0.$$

Remarquons d'abord que la mésure riemannienne de courbure d'une bi-direction est en même temps, comme cela ré-

sulte de la définition, la courbure scalaire. Ainsi donc dans le cas de l'espace à quatre dimensions la différence entre les deux propositions du § précédent disparait et nous obtenons la proposition unique suivante:

Pour que l'espace V_4 soit un espace C_4 il faut et il suffit qu'en tout point la somme des mésures riemanniennes de courbure d'un système arbitraire de deux bi-directions mutuellement perpendiculaires soit indépendante du choix special de ce système.

Nous avons pour cette somme dans le cas envisagé la formule

$$\varkappa' + \varkappa'' = 2\varkappa. \tag{3.43}$$

La relation (3.43), en tenant compte des formules (2.21) et (2.23), peut être écrite sous la forme:

$$\varepsilon' K_{\nu\mu\lambda\varkappa} f'^{\nu\mu} f'^{\lambda\varkappa} + \varepsilon'' K_{\nu\mu\lambda\varkappa} f''^{\nu\mu} f''^{\lambda\varkappa} = -8\varkappa, \tag{3.44}$$

où $f'^{\nu\mu}$ et $f''^{\nu\mu}$ sont deux bivecteurs unités de deux bi-directions correspondantes perpendiculaires entre eux et ε' resp. ε'' sont égaux -1 ou $+1$ suivant que les bi-directions correspondantes possèdent les vecteurs asymptotiques réelles ou ne les possèdent pas. Des relations (1.22) et (1.25) on aura encore:

$$a_{\nu\lambda} a_{\mu\varkappa} f'^{\nu\mu} f'^{\lambda\varkappa} = 2e'. \tag{3.45}$$

En multipliant les deux membres de (3.44) par ε' on aura en tenant compte de (3.45) l'équation:

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} f'^{\nu\mu} f'^{\lambda\varkappa} + \varepsilon K_{\nu\mu\lambda\varkappa} f''^{\nu\mu} f''^{\lambda\varkappa} = -4\varkappa a_{\nu\lambda} a_{\mu\varkappa} f'^{\nu\mu} f'^{\lambda\varkappa}, \tag{3.46}$$

où $\varepsilon = \varepsilon' \varepsilon'' = \pm 1$, le signe de ε étant celui du déterminant $\mathfrak{a} = |a_{\lambda\varkappa}|$.

En substituant dans (3.46) au lieu de $f''^{\lambda\varkappa}$ une expression égale donnée par la formule (2.26), nous obtenons:

$$\left[K_{\nu\mu\lambda\varkappa} + \frac{\varepsilon}{4} K^{\varrho\sigma\omega\tau} I_{\varrho\sigma\nu\mu} I_{\omega\tau\lambda\varkappa} + 4\varkappa a_{\nu\lambda} a_{\mu\varkappa}\right] f'^{\nu\mu} f'^{\lambda\varkappa} = 0. \tag{3.47}$$

La dernière équation s'applique à un bivecteur-unité arbitraire $f'^{\nu\mu}$ si l'on a identiquement:

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} + \frac{\varepsilon}{4} K^{\varrho\sigma\omega\tau} I_{\varrho\sigma\nu\mu} I_{\omega\tau\lambda\varkappa} + 4\varkappa a_{[\nu[\lambda} a_{\mu]\varkappa]} = 0 \tag{3.48}$$

et dans ce cas seulement. Dans cette formule apparait le produit alterné $a_{[\nu[\lambda}a_{\mu]\varkappa]}$ car il est évident que c'est uniquement sa partie alternée qui joue un rôle dans la formule (3.47). Un raisonnement identique à celui que nous avons fait pour obtenir la relation (2.32) conduit à l'équation suivante, équivalente à l'équation (3.48):

$$(3.49) \qquad K_{\nu\mu\lambda\varkappa} + \tfrac{1}{4}\,\mathfrak{a}\,K^{\varrho\sigma\omega\tau}\mathfrak{n}_{\varrho\sigma\nu\mu}\mathfrak{n}_{\omega\tau\lambda\varkappa} + 4\,\varkappa\,a_{[\nu[\lambda}a_{\mu]\varkappa]} = 0.$$

Comme cela résulte de notre raisonnement, la relation (3.49) équivaut à la condition que la somme des mésures riemanniennes de courbure de toutes les bi-directions perpendiculaires entre elles soit dans tout point de V_4 indépendante du choix spécial de ces bi-directions, c'est à dire que l'espace envisagé V_4 soit C_4.

Si l'on se base sur la proposition citée [35]) on en tire:

La proposition 8. *L'équation* (3.49) *est équivalente dans l'espace* V_4 *à l'équation*

$$(3.50) \qquad K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = 2\,a_{[\nu[\lambda}L_{\mu]\varkappa]}$$

où

$$(3.51) \qquad L_{\mu\varkappa} = -K_{\mu\varkappa} + \tfrac{1}{6}K\,a_{\mu\varkappa}.$$

L'équivalence des relations (3.49) et (3.50) peut être montrée directement par la voie suivante:

Si nous écrivons la relation (3.49) pour un système quelconque de référence rectangulaire, il en résultera la disparition dans chacun de ces systèmes de toutes les composantes de l'affineur de courbure à quatre indices inégaux et on parvient à la relation (3.50).

Supposons maintenant, que l'affineur de courbure à quatre indices remplisse la condition (3.50) et calculons le premier membre de la relation (3.48); en le désignant par $l_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ on aura

$$(3.52) \qquad \begin{aligned} l_{\nu\mu\lambda\varkappa} &= K_{\nu\mu\lambda\varkappa} + \frac{\varepsilon}{4}K_{\varrho\sigma\omega\tau}I^{\varrho\sigma}_{\cdot\cdot\nu\mu}I^{\omega\tau}_{\cdot\cdot\lambda\varkappa} + \frac{1}{3}K\,a_{[\nu[\lambda}a_{\mu]\varkappa]} = \\ &= 2\,a_{[\nu[\lambda}L_{\mu]\varkappa]} + \frac{\varepsilon}{2}a_{[\varrho[\omega}L_{\sigma]\tau]}I^{\varrho\sigma}_{\cdot\cdot\nu\mu}I^{\omega\tau}_{\cdot\cdot\lambda\varkappa} + \frac{1}{3}K a_{[\nu[\lambda}a_{\mu]\varkappa]}.\end{aligned}$$

---

[35]) Chap. I, p, 48.

Nous allons nous occuper avant tout du terme du milieu de la dernière expression que nous désignerons, pour abréger, par $s_{\nu\mu\lambda\varkappa}$. Le quadrivecteur-unité $I^{\varrho\sigma}_{\cdot\cdot\nu\mu}$ étant alterné par rapport aux indices ϱ, σ et aussi ν, μ on aura donc:

$$(3.53)\qquad s_{\nu\mu\lambda\varkappa} = \frac{1}{2}\varepsilon a_{\varrho\omega} L_{\sigma\tau} I^{\varrho\sigma}_{\cdot\cdot\nu\mu} I^{\omega\tau}_{\cdot\cdot\lambda\varkappa} = \frac{\varepsilon}{2} L_{\sigma\tau} I^{\varrho\sigma\alpha\beta} I_{\varrho\eta\lambda\varkappa} a^{\tau\eta} a_{\alpha\nu} a_{\beta\mu}.$$

En nous basant sur la définition de la grandeur $I_{\varkappa\lambda\mu\nu}$, nous pouvons obtenir que [36])

$$(3.54)\qquad I_{\varrho\eta\lambda\varkappa} I^{\varrho\sigma\alpha\beta} = 6\varepsilon A^{[\sigma}_{[\eta} A^{\alpha}_{\lambda} A^{\beta]}_{\varkappa]}.$$

La relation (3.53) aura donc la forme:

$$(3.55)\qquad \begin{aligned} s_{\nu\mu\lambda\varkappa} &= 3 L_{\sigma\tau} a^{\tau\eta} a_{\alpha\nu} a_{\beta\mu} A^{[\sigma}_{[\eta} A^{\alpha}_{\lambda} A^{\beta]}_{\varkappa]} = 3 L_{[\eta}^{\cdot\;\eta} a_{\lambda|\nu|} a_{\varkappa]\mu} = \\ &= L_{\eta}^{\cdot\;\eta} a_{[\lambda|\nu|} a_{\varkappa]\mu} - L_{\lambda}^{\cdot\;\eta} a_{[\eta|\nu|} a_{\varkappa]\mu} + L_{\varkappa}^{\cdot\;\eta} a_{[\eta|\nu|} a_{\lambda]\mu}. \end{aligned}$$

Profitant de la relation facile à verifier:

$$(3.56)\qquad a_{[\lambda|\mu|} a_{\nu]\omega} = a_{[\lambda[\mu} a_{\nu]\omega]} = a_{\lambda[\mu} a_{|\nu|\omega]}$$

ainsi que de la relation (1.10) nous pouvons donner à la formule (3.55) la forme suivante:

$$(3.57)\qquad \begin{aligned} s_{\nu\mu\lambda\varkappa} &= L_{\eta}^{\cdot\;\eta} a_{[\lambda[\nu} a_{\varkappa]\mu]} - L_{\lambda[\nu} a_{|\varkappa|\mu]} + L_{\varkappa[\nu} a_{|\lambda|\mu]} = \\ &= L_{\eta}^{\cdot\;\eta} a_{[\lambda[\nu} a_{\varkappa]\mu]} - 2 L_{[\lambda[\nu} a_{\varkappa]\mu]}. \end{aligned}$$

Mais de la relation (3.51) résulte

$$(3.58)\qquad L_{\eta}^{\cdot\;\eta} = -K + \tfrac{2}{3} K = -\tfrac{1}{3} K.$$

Les grandeurs $a_{\mu\lambda}$ et $L_{\mu\lambda}$ sont les tenseurs, donc

$$(3.59)\qquad s_{\nu\mu\lambda\varkappa} = -\tfrac{1}{3} K a_{[\nu[\lambda} a_{\mu]\varkappa]} - 2 a_{[\nu[\lambda} L_{\mu]\varkappa]}.$$

En substituant la dernière expression dans la formule (3.52), nous obtenons que

$$l_{\nu\mu\lambda\varkappa} = 2 a_{[\nu[\lambda} L_{\mu]\varkappa]} - \tfrac{1}{3} K a_{[\nu[\lambda} a_{\mu]\varkappa]} - 2 a_{[\nu[\lambda} L_{\mu]\varkappa]} + \tfrac{1}{3} K a_{[\nu[\lambda} a_{\mu]\varkappa]} = 0.$$

La formule (3.48) et, par conséquent, (3.49) résultent de la formule (3.50) ce qui démontre leur équivalence.

---

[36]) Sch., Str., I, p. 29 et 53.

§ 3. Espace C_n à un nombre quelconque des dimensions, n.

HAANTJES[37]) a étendu les résultats du premier § du présent chapitre aux espaces à un nombre arbitraire (pas nécessairement pair) de dimensions. Il envisage, notamment, dans l'espace V_n p $(p \geqslant 2)$ m_i-directions mutuellement perpendiculaires et suppose que les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_p$ satisfont aux

$$(3.60) \qquad n-1 > m_i > 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i|1}^{p} m_i = n.$$

En désignant par $\underset{1}{a}^{\lambda\varkappa}, \underset{2}{a}^{\lambda\varkappa}, \ldots, \underset{p}{a}^{\lambda\varkappa}$ les tenseurs métriques qui correspondent à ces m_i-directions et par $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p$ les courbures scalaires correspondantes, HAANTJES énonce:

La proposition 9. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace V_n, $n \geqslant 4$, soit un espace conformément euclidien est que la somme*

$$(3.61) \qquad m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_p\varkappa_p$$

soit pour un système de nombres m_i remplissant les conditions (3.60) *dans tout point de l'espace pour un système arbitraire des m_i-directions mutuellement perpendiculaires indépendante du choix de ce système des m_i-directions.*

On verra dans la suite que cette somme est constamment égale à $n\varkappa$ ou $\varkappa$ désigne la courbure scalaire de l'espace V_n.

Remarquons que si $n = 2m$ et $p = m$, dans ce cas: $m_1 = m_2 = \ldots = m_p = 2$ et on aura de la dernière proposition, comme cas particulier, la proposition 5. Si enfin, $n = 2m$, $p = 2$ et $m_1 = m_2 = m$ la proposition 9 concorde avec la proposition 6.

Démonstration. En démontrant la proposition de HAANTJES nous n'avons pas besoin de nous occuper du cas $n = 4$ dont l'étude fut épuisée par chacune des propositions 5 et 6. Ceci est d'autant plus important que la démonstration que nous allons donner fait défaut pour $n = 4$.

Nous montrerons en premier lieu que dans les espaces conformément euclidiens la somme (3.61) est constamment

[37]) Haantjes, *Eine Charakt. etc. Proceedings* Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Vol. XLIII, N° 1, 1940.

égale à $n\varkappa$ et, par conséquent, est indépendante dans tout point du choix spécial de p m_i-directions mutuellement perpendiculaires.

De la formule (2.4) nous avons

$$(3.62) \qquad m_1\varkappa_1 = \frac{1}{m_1-1} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} \underset{1}{a}^{\nu\varkappa} \underset{1}{a}^{\mu\lambda}.$$

Si l'on tient compte que pour l'espace C_n s'applique la formule (1.53), on obtient en vertu de (3.62) que

$$m_1\varkappa_1 = \frac{1}{m_1-1}\cdot\frac{1}{n-2}[a_{\nu\lambda}L_{\mu\varkappa} - a_{\mu\lambda}L_{\nu\varkappa} - a_{\nu\varkappa}L_{\mu\lambda} + a_{\mu\varkappa}L_{\nu\lambda}] \underset{1}{a}^{\nu\varkappa} \underset{1}{a}^{\mu\lambda} =$$

$$(3.63) \qquad = \frac{1}{m_1-1}\,\frac{1}{n-2}[L_{\mu\varkappa}\underset{1}{a}^{\mu\varkappa} - m_1 L_{\mu\varkappa}\underset{1}{a}^{\mu\varkappa} - m_1 L_{\mu\varkappa}\underset{1}{a}^{\mu\varkappa} + L_{\mu\varkappa}\underset{1}{a}^{\mu\varkappa}]$$

$$= \frac{-2}{n-2} L_{\mu\varkappa}\underset{1}{a}^{\mu\varkappa}.$$

En vertu de (3.63) et (1.40) on aura pour la somme (3.61) la formule

$$(3.64) \qquad m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_p\varkappa_p = \frac{-2}{n-2} L_{\mu\varkappa}[\underset{1}{a}^{\mu\varkappa} + \underset{2}{a}^{\mu\varkappa} + \ldots + \underset{p}{a}^{\mu\varkappa}] = = \frac{-2}{n-2} L_{\mu\varkappa} a^{\mu\varkappa}.$$

D'autre part, si l'on tient compte de (1.51), on a:

$$(3.65) \qquad L_{\mu\varkappa}a^{\mu\varkappa} = -K + \frac{n}{2(n-1)}K = \frac{-n+2}{2(n-1)}K = -\frac{(n-2)n}{2}K$$

et de (3.64) on obtient

$$(3.66) \qquad m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_p\varkappa_p = \frac{-2}{n-2}\cdot\left(-\frac{(n-2)n}{2}\varkappa\right) = n\varkappa$$

ce que nous voulions précisement démontrer.

Nous passons maintenant à la démonstration de la proposition réciproque. Supposons donc que pour un certain système fixé de nombres m_i, $(i=1,2,\ldots,p)$ (remplissant les

conditions (3.60)) la somme (3.61) ne dépende pas du choix spécial des m_i-directions mutuellement perpendiculaires.

Nous voulons affirmer que dans ce cas l'espace est conformément euclidien. Considérons auparavant le cas particulier $p=2$ c'est à dire où l'on a affaire à une certaine m_1-direction perpendiculaire à la m_2-direction et

$$(3.68) \qquad m_1+m_2=n; \quad \underset{1}{a}^{\lambda\varkappa}+\underset{2}{a}^{\lambda\varkappa}=a^{\lambda\varkappa}.$$

Nous pouvons également admettre qu'un des nombres m_1, m_2 soit plus grand que 2 (le cas où $m_1=m_2=2$ fut l'objet de la proposition 5). Nous pouvons maintenant écrire la somme (3.61) sous la forme:

$$(3.69) \qquad \begin{aligned} m_1\varkappa_1+m_2\varkappa_2 &= \frac{1}{m_1-1}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\underset{1}{a}^{\nu\varkappa}\underset{1}{a}^{\mu\lambda}+\frac{1}{m_2-1}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\underset{2}{a}^{\nu\varkappa}\underset{2}{a}^{\mu\lambda}= \\ &=\left(\frac{1}{m_1-1}+\frac{1}{m_2-1}\right)K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\underset{1}{a}^{\nu\varkappa}\underset{1}{a}^{\mu\lambda}+ \\ &\quad+\frac{1}{m_2-1}(K-2K_{\mu\lambda}\underset{1}{a}^{\mu\lambda})= \\ &=\frac{1}{m_2-1}\left[\frac{n-2}{m_1-1}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\underset{1}{a}^{\nu\varkappa}\underset{1}{a}^{\mu\lambda}+K-2K_{\mu\lambda}\underset{1}{a}^{\mu\lambda}\right]. \end{aligned}$$

La somme $m_1\varkappa_1+m_2\varkappa_2$ étant indépendante du choix spécial de la m_1-direction, la dernière expression ne dépend pas également du choix spécial du tenseur $\underset{1}{a}^{\mu\lambda}$. Considérons maintenant deux m_1-directions possédant une (m_1-1)-direction commune et désignons par $\underset{1}{\overline{a}}^{\mu\lambda}$ et $\underset{1}{\overline{\overline{a}}}^{\mu\lambda}$ les tenseurs métriques qui leur correspondent. On a dans ce cas les relations:

$$(3.70) \qquad \begin{aligned} \underset{1}{\overline{a}}^{\mu\lambda} &= b^{\mu\lambda}+\underset{p}{\varepsilon}p^\mu p^\lambda; & \underset{p}{\varepsilon} &= p^\varkappa p_\varkappa; \\ \underset{1}{\overline{\overline{a}}}^{\mu\lambda} &= b^{\mu\lambda}+\underset{q}{\varepsilon}q^\mu q^\lambda; & \underset{q}{\varepsilon} &= q^\varkappa q_\varkappa, \end{aligned}$$

où $b^{\mu\lambda}$ est le tenseur métrique correspondant à la (m_1-1)-direction commune et $p^\varkappa$ et q sont deux vecteurs-unités perpendiculaires à cette direction. L'expression du second membre de (3.69) ayant la même valeur pour $\underset{1}{\overline{a}}^{\mu\lambda}$ et pour $\underset{1}{\overline{\overline{a}}}^{\mu\lambda}$, on obtient donc:

$$\frac{1}{m_2-1}\Big[K-2K_{\mu\lambda}b^{\mu\lambda}-2\underset{p}{\varepsilon}K_{\mu\lambda}p^\mu p^\lambda+$$

$$+\frac{n-2}{m_1-1}(K_{\nu\mu\lambda\varkappa}b^{\nu\varkappa}b^{\mu\lambda}+2\underset{p}{\varepsilon}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}b^{\nu\varkappa}p^\mu p^\lambda)\Big]=$$

(3.71)

$$=\frac{1}{m_2-1}\Big[K-2K_{\mu\lambda}b^{\mu\lambda}-2\underset{q}{\varepsilon}K_{\mu\lambda}q^\mu q^\lambda+$$

$$+\frac{n-2}{m_1-1}(K_{\nu\mu\lambda\varkappa}b^{\nu\varkappa}b^{\mu\lambda}+2\underset{q}{\varepsilon}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}b^{\nu\varkappa}q^\mu q^\lambda)\Big],$$

d'où, après la réduction:

$$\underset{p}{\varepsilon}p^\mu p^\lambda\Big(-K_{\mu\lambda}+\frac{n-2}{m_1-1}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}b^{\nu\varkappa}\Big)=$$

(3.72)

$$=\underset{q}{\varepsilon}\Big(-K_{\mu\lambda}+\frac{n-2}{m_1-1}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}b^{\nu\varkappa}\Big)q^\mu q^\lambda.$$

Dans cette équation p^μ et q^μ sont deux vecteurs-unités arbitraires perpendiculaires à la (m_1-1)-direction envisagée. Il s'ensuit que [38])

$$(3.73)\qquad -K_{\mu\lambda}s^\mu r^\lambda+\frac{n-2}{m_1-1}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}b^{\nu\varkappa}s^\mu r^\lambda=0$$

pour deux vecteurs arbitraires s^μ et r^μ perpendiculaires entre eux et à la (m_1-1)-direction.

La dernière équation a lieu indépendamment du choix spécial de la (m_1-1)-direction envisagée pour les tenseurs $\overline{b}^{\lambda\mu}$ et $\overline{\overline{b}}^{\lambda\mu}$ déterminés par la formule (3.30) correspondant à deux (m_1-1)-directions, ayant la (m_1-2)-directions commune ce qui est possible puisque $m_1>2$, nous obtiendrons donc:

$$(3.74)\qquad -K_{\mu\lambda}s^\mu r^\lambda+\frac{n-2}{m_1-1}(K_{\nu\mu\lambda\varkappa}c^{\nu\varkappa}s^\mu r^\lambda+\underset{m}{\varepsilon}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}m^\nu m^\varkappa s^\mu r^\lambda)=0$$

et

$$-K_{\mu\lambda}s^\mu r^\lambda+\frac{n-2}{m_1-1}(K_{\nu\mu\lambda\varkappa}c^{\nu\varkappa}s^\mu r^\lambda+\underset{n}{\varepsilon}K_{\nu\mu\lambda\varkappa}n^\nu n^\varkappa s^\mu r^\lambda)=0.$$

La soustraction de deux dernières équations conduit à la relation:

[38]) Voir p. 66 (3.29).

$$(3.75) \qquad \underset{m}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} m^\nu m^\varkappa s^\mu r^\lambda = \underset{n}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} n^\nu n^\varkappa s^\mu r^\lambda,$$

qui a lieu pour les vecteurs-unité arbitraires n^μ et m^μ perpendiculaires à s^μ et r^μ. Il résulte de là que pour quatre vecteurs arbitraires mutuellement perpendiculaires $u^\nu, v^\nu, s^\nu, r^\nu$ on aura:

$$(3.76) \qquad K_{(\nu|\mu\lambda|\varkappa)} u^\nu v^\varkappa s^\mu r^\lambda = 0 .$$

La dernière relation est identique à la relation (3.33). Il en résulte que toutes les composantes de l'affineur de courbure à quatre indices inégaux disparaissent dans les systèmes de référence rectangulaires, c'est à dire que l'espace considéré V_n est conformément euclidien. La proposition est donc démontrée dans le cas $p=2$. Si $p>2$ nous pouvons montrer pareillement que la relation (3.76) a lieu pour quatre vecteurs arbitraires perpendiculaires entre eux appartenant à une (m_1+m_2)-direction. Dans la démonstration il faut considerer comme fixées toutes les m_i-directions pour $i=3,4,\dots,p$ et de faire varier par la méthode exposée la m_1-direction et la m_2-direction dans le cadre de la (m_1+m_2)-direction. Conformément à notre supposition, la (m_1+m_2)-direction envisagée peut être choisie arbitrairement; il s'ensuit que l'égalité (3.76) doit avoir place pour 4 vecteurs arbitraires mutuellement perpendiculaires. Cette méthode sera en défaut quand

$$m_1 = m_2 = \dots = m_p = 2$$

mais dans ce cas la proposition que nous voulons prouver concoure avec la proposition 5. La proposition de HAANTJES est ainsi démontrée.

Chapitre 4

Conditions nécessaires et suffisantes pour l'espace soit à courbure constante

§ 1. Généralisation de la proposition de F. SCHUR. La mésure riemannienne de courbure de la bi-direction dans l'espace V_n, $(n>2)$, définie dans le premier chapitre possède une propriété importante exprimée par la proposition suivante connue sous le nom de proposition de F. SCHUR[39]).

[39]) T. Levi Civita, p. 126; Eisenhart, p. 82.

Si la mésure riemannienne de courbure de la bi-direction non singulière est indépendante dans chaque point du choix spécial de cette bi-direction elle ne varie pas d'un point à l'autre c'est à dire qu'elle est constante dans tout l'espace.

L'espace V_n est dans ce cas un espace à courbure constante S_n et son affineur de courbure remplit identiquement la condition [40])

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = -2\varkappa\, a_{[\nu[\lambda}\, a_{\mu]\varkappa]}. \tag{4.1}$$

La proposition de F. Schur peut être généralisée de la manière suivante:

Proposition 10. *Si dans l'espace V_n pour un certain nombre m remplissant la condition $1 < m < n$ la courbure scalaire de la m-direction est dans chaque point indépendante du choix spéciale de cette direction elle ne varie pas d'un point à l'autre.*

Il résulte aussi de ces mêmes prémisses que dans lè cas $m < n-1$ l'espace envisagé est un espace S_n, il n'est que l'espace E_n, si $m = n-1$.

Démonstration. Dans le cas $m = n-1$ il résulte de nos suppositions et de la propositions 2 que l'espace envisagé est einsteinien E_n, chaque $(n-1)$-direction aura une courbure scalaire égale à celle de l'espace E_n [41]) laquelle, comme nous le savons, est constante [42]). Pour démontrer la proposition dans le cas $m < n-1$ nous envisagerons au point arbitraire P deux m-directions possédant une $(m-1)$-direction commune et désignerons par $\overline{a}'^{\lambda\varkappa}$ et $\overline{\overline{a}}'^{\lambda\varkappa}$ les tenseurs métriques correspondants. Nous pouvons présenter ces tenseurs sous la forme donnée par les relations (2.16). Pour la courbure scalaire de ces deux m-directions nous avons les formules:

$$\begin{aligned} \overline{\varkappa} &= \frac{1}{m(m-1)} K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\, \overline{a}'^{\mu\lambda}\, \overline{a}'^{\nu\varkappa}; \\ \overline{\overline{\varkappa}} &= \frac{1}{m(m-1)} K_{\nu\mu\lambda\varkappa}\, \overline{\overline{a}}'^{\mu\lambda}\, \overline{\overline{a}}'^{\nu\varkappa}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

---

[40]) Voir p. 48, f. (1.54).
[41]) Voir p. 58, f. (2.39).
[42]) Voir p. 47, f. (1.48).

De notre supposition et des relations (2.16) et (4.2) nous obtenons:

(4.3)
$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} b^{\mu\lambda} b^{\nu\varkappa} + 2 \underset{p}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} q^{\nu} q^{\varkappa} b^{\mu\lambda} + K_{\nu\mu\lambda\varkappa} q^{\mu} q^{\lambda} q^{\nu} q^{\varkappa} = $$
$$= K_{\nu\mu\lambda\varkappa} b^{\mu\lambda} b^{\nu\varkappa} + 2 \underset{p}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} p^{\nu} p^{\varkappa} b^{\mu\lambda} + K_{\nu\mu\lambda\varkappa} p^{\mu} p^{\lambda} p^{\nu} p^{\varkappa}$$

et de là

(4.4)
$$\underset{p}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} b^{\mu\lambda} p^{\nu} p^{\varkappa} = \underset{q}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} b^{\mu\lambda} q^{\nu} q^{\varkappa}.$$

La dernière équation s'applique à une $(m-1)$-direction quelconque et à tous les couples des vecteurs-unités p^{ν}, q^{ν} perpendiculaires à cette $(m-1)$-direction. Il en résulte que[43])

(4.5)
$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} b^{\mu\lambda} r^{\nu} s^{\varkappa} = 0$$

où r^{ν} et $s^{\varkappa}$ sont deux vecteurs perpendiculaires entre eux et à la $(m-1)$-direction envisagée.

Si $m-1 \geqslant 2$, l'équation (4.5) peut être récrite pour deux $(m-1)$-directions différentes dont les tenseurs métriques $\bar{b}^{\lambda\mu}$ et $\bar{\bar{b}}^{\lambda\mu}$ correspondants sont donnés par la formule (3.30). La soustraction de deux équations ainsi obtenues nous donne

(4.6)
$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} c^{\mu\lambda} r^{\nu} s^{\varkappa} + \underset{m}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} m^{\mu} m^{\lambda} r^{\nu} s^{\varkappa} - K_{\nu\mu\lambda\varkappa} c^{\mu\lambda} r^{\nu} s^{\varkappa} -$$
$$- \underset{n}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} n^{\mu} n^{\lambda} r^{\nu} s^{\varkappa}$$

et ensuite:

(4.7)
$$\underset{m}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} m^{\mu} m^{\lambda} r^{\nu} s^{\varkappa} = \underset{n}{\varepsilon} K_{\nu\mu\lambda\varkappa} n^{\mu} n^{\lambda} r^{\nu} s^{\varkappa};$$

où m^{μ} et n^{μ} sont deux vecteurs-unités arbitraires perpendiculaires aux vecteurs r^{ν} et $s^{\varkappa}$. De la relation (4.7) résulte que:

(4.8)
$$K_{\nu(\mu\lambda)\varkappa} u^{\mu} v^{\lambda} r^{\nu} s^{\varkappa} = 0$$

pour tous les quatre vecteurs perpendiculaires entre eux u^{ν}, v^{ν}, r^{ν}, s^{ν}. En vertu des formules (1.30—1.3) la dernière relation est équivalente à l'équation

(4.9)
$$K_{(\nu|\mu\lambda|\varkappa)} r^{\mu} s^{\lambda} u^{\nu} v^{\varkappa} = 0.$$

Cette relation étant identique à la relation (3.33) il en résulte que l'espace envisagé est conformément euclidien.

---

[43]) Voir p. 66, f. (3.29).

Pour la courbure scalaire $\varkappa'$ de la m-direction dont le tenseur métrique correspondant nous avons désigné par $a'^{\mu\lambda}$, nous obtenons maintenant sur la base de (1.53) et de (3.63) la formule

$$\varkappa' = \frac{-2}{m(n-2)} L_{\mu\varkappa} a'^{\mu\varkappa}. \tag{4.10}$$

Nous pouvons récrire cette équation pour deux m-directions dont les tenseurs métriques correspondants $\overline{a}'^{\mu\lambda}$ et $\overline{\overline{a}}'^{\mu\lambda}$ sont donnés par les formules (2.16). De là, en nous basant sur la supposition que

$$\overline{\varkappa}' = \overline{\overline{\varkappa}}', \tag{4.11}$$

nous obtenons que

$$\frac{-2}{m(n-2)} L_{\mu\varkappa}(b^{\mu\varkappa} + \underset{p}{\varepsilon}\, p^{\mu} p^{\varkappa}) = \frac{-2}{m(n-2)} L_{\mu\varkappa}(b^{\mu\varkappa} + \underset{q}{\varepsilon}\, q^{\mu} q^{\varkappa}) \tag{4.12}$$

et de là

$$\underset{p}{\varepsilon}\, L_{\mu\varkappa} p^{\mu} p^{\varkappa} = \underset{q}{\varepsilon}\, L^{\mu\varkappa} q^{\mu} q^{\varkappa}, \tag{4.13}$$

où p^{μ} et q^{μ} sont deux vecteurs-unités arbitraires. Nous en concluons que [44])

$$L_{\mu\varkappa} = \sigma\, a_{\mu\varkappa}. \tag{4.14}$$

L'affineur de courbure revètira actuellement la forme [45])

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = \frac{4}{n-2} \sigma\, a_{[\nu[\lambda}\, a_{\mu]\varkappa]}. \tag{4.15}$$

Si l'on substitue dans cette relation

$$\sigma = -\frac{n-2}{2} \varkappa \tag{4.16}$$

nous aurons

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} = -2\varkappa\, a_{[\nu[\lambda}\, a_{\mu]\varkappa]}. \tag{4.17}$$

Notre espace est ainsi un espace à courbure constante et $\varkappa$ est une constante.

Des formules (4.10), (4.14), (4.16) nous obtenons

$$\varkappa' = \frac{-2}{m(n-2)} \cdot \frac{2-n}{2} \varkappa\, a_{\mu\lambda} a'^{\mu\lambda} = \varkappa. \tag{4.18}$$

---

[44]) Voir p. 51, f. (2.14).

[45]) Voir p. 48, f. (1.53).

La courbure scalaire de la m-direction, étant égale à celle de l'espace S_n, est constante. C'est précisement ce que nous nous proposions de montrer.

Il faut encore remarquer que cette preuve renferme aussi le cas exclu $m=2$ car dans ce cas la relation (4.9) résulte directement de la relation (4.5). Dans ce cas notre proposition concorde avec la proposition de F. Schur.

§ 2. Corollaires pour éspace S_n.

De la démonstration que nous venons de donner plus haut, résulte immédiatement la proposition suivante:

Proposition 11. *Pour que l'espace V_n soit un espace S_n il faut et il suffit que pour un certain nombre m où $1 < m < n-1$ la courbure scalaire ae la m-direction dans chaque point ne dépende pas du choix spécial de cette m-direction.*

De la proposition 2 chapitre 2 et de la proposition F. Schur valable pour V_n $(n \geqslant 3)$ résulte comme conséquence la proposition connue suivante.

Tout espace einsteinien E_3 est à courbure constante c'est à dire un espace S_3.

En effet si l'on a E_3, on aura en vertu de la proposition 2 que la courbure scalaire de la bi-direction quelconque est constante et de là, en tenant compte de la proposition de Schur, on en concluera que l'espace est à courbure constante.

L'espace à courbure constante est en même temps un espace conformément euclidien et einsteinien. L'espace à quatre dimensions à courbure constante S_4 satisfait donc aux relations (2.32) et (3.49). En les soustrayant on obtient:

$$(4.19) \qquad \mathfrak{a} K^{\varrho\sigma\omega\tau} \mathfrak{n}_{\varrho\sigma\nu\mu} \mathfrak{n}_{\omega\tau\lambda\varkappa} = -8 \varkappa\, a_{[\nu[\lambda}\, a_{\mu]\varkappa]}.$$

Reciproquement, si dans l'espace V_n a lieu l'identité (4.19) il est facile de voir que toutes les composantes de l'affineur de courbure possèdent au moins trois indices différents disparaissant dans les systèmes de référence rectangulaires. L'espace considéré est donc S_4. Nous pouvons énoncer la proposition:

Proposition 12. *Dans l'espace V_4 les relations* (4.1) *et* (4.19) *sont équivalentes.*

SUR L'ÉVALUATION DU DOMAINE D'EXISTENCE DES FONCTIONS IMPLICITES RÉELLES OU COMPLEXES

Par TADEUSZ WAŻEWSKI (Cracovie)

L'évaluation du domaine d'existence des fonctions implicites $y_i = \varphi^i(x_1, \dots, x_p)$ déterminées par le système d'équations

$$f^i(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

sera basée sur une notion que nous appelons allongement supérieur ou inférieur d'une suite de fonctions.

Dans le § 1 nous donnons une définition analytique (cf. § 1, VII) et géométrique (§ 1, XIX) des allongements en question et quelques propriétés de ces notions. Nous indiquons, en particulier, quelques limitations de ces allongements (§ 1, XII).

Les Théorèmes 1 et 2 (§ 2) fournissent des évaluations du domaine d'existence des fonctions implicites.

Le Théorème 3 (§ 3) évalue le domaine d'existence de la transformation inverse d'une transformation donnée.

Le Théorème 4 (§ 4) évalue le domaine dans lequel une transformation uniforme est univalente (cf. la définition dans le § 4).

Le § 5 est consacré aux évaluations en question relatives aux équations legèrement perturbées.

Les démonstrations s'appuient sur la théorie des équations différentielles. J'ai communiqué un cas particulier de ces resultats avant la guerre et ceux du présent travail au cours des seances mathématiques en conspiration pendant la guerre.

La définition géométrique des allongements (§ 1, XIX) suggère une extension des théorèmes 1—4 au cas des fonctions implicites dans les espaces vectoriels, normés et complets

de BANACH[1]). Sur ce terrain les démonstrations peuvent être effectuées par une méthode plus élémentaire.

§ 1. Allongements inférieur et supérieur d'une suite de fonctions.

La définition de ces notions et leurs propriétés seront étroitement liées avec la notion des valeurs caractéristiques des formes hermitiennes (dans le cas des variables complexes) et des formes quadratiques (dans le cas des variables réelles). Soit

$$Q = \sum_{\alpha/1}^{p} \sum_{\beta/1}^{p} a_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha\, \bar{\xi}_\beta \tag{1,1}$$

une forme hermitienne des variables complexes $\xi_1, \dots, \xi_p$ dont les coefficients fixes satisfont aux relations

$$a_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\beta\alpha}\ ^{2)}.$$

En appliquant à la forme Q une transformation unitaire[3])

$$\xi_\alpha = \sum_{\gamma/1}^{p} c_{\alpha\gamma}\, \eta_\gamma \quad (\alpha = 1, \dots, p) \tag{1,2}$$

on obtient la forme hermitienne

$$R = \sum_{\gamma/1}^{p} \sum_{\delta/1}^{p} A_{\gamma\delta}\, \eta_\gamma\, \bar{\eta}_\delta \tag{1,3}$$

où

$$A_{\gamma\delta} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} c_{\alpha\gamma}\, \bar{c}_{\beta\delta}, \quad A_{\gamma\delta} = \bar{A}_{\delta\gamma} \tag{1,4}$$

et on aura

$$\sum_{\alpha} |\xi_\alpha|^2 = \sum_{\gamma} |\eta_\gamma|^2. \tag{1,5}$$

---

[1]) Les résultats en question ont été communiqués au cour de la séance du 2. VII. 1946 de la Société Polon. de Math. (section de Cracovie) et le 13. XII. 1946 au Congrès de Wrocław. Ils seront publiés dans un autre périodique.

[2]) $\bar{b} = \gamma - i\mu$ désigne le nombre complexe conjugué avec $b = \gamma + i\mu$.

[3]) On a, conformément à la définition de la transformation unitaire, la relation $\sum_{\alpha} c_{\alpha\gamma}\, c_{\alpha\varepsilon} = \delta_{\alpha\varepsilon}$ où $\delta_{\alpha\varepsilon} = 0$ pour $\alpha \neq \varepsilon$ et $\delta_{\alpha\alpha} = 1$.

Les polynômes caractéristiques des formes Q et R sont identiques c. à d.

(1,6) $$\text{Dét}\,(a_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}\,s)\equiv\text{Dét}\,(A_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}\,s)$$

pour toutes les valeurs de s. En particulier

(1,7) $$\text{Dét}\,(a_{\alpha\beta})=\text{Dét}\,(A_{\alpha\beta}).$$

Les équations caractéristiques de Q et R, c.-à-d. les équations

(1,8) $$\text{Dét}\,(a_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}\,s)=0$$

(1,9) $$\text{Dét}\,(A_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}\,s)=0,$$

possèdent les mêmes racines $s_1,\ldots,s_p$ dites valeurs caractéristiques de Q et de R. On peut choisir la transformation unitaire de façon que l'on ait

(1,10) $$A_{\alpha\beta}=0 \text{ pour } \alpha\neq\beta,$$

c.-à-d. de façon que R soit canonique [4]). On aura dans ce cas

(1,11) $$R=\sum_{\alpha/1}^{p}A_{\alpha\alpha}\,\eta_\alpha\,\overline{\eta}_\alpha=\sum_{\alpha/1}^{p}A_{\alpha\alpha}\,|\,\eta_\alpha|^2$$

où les $A_{\alpha\alpha}$ sont réels (car $A_{\alpha\alpha}=\overline{A}_{\alpha\alpha}$).

Nous nous servirons, dans la suite, des suivantes propriétés, bien connues, des formes hermitiennes qui sont évidentes au cas des formes canoniques et s'étendent au cas général grâce à l'invariance du polynôme caractéristique et de l'expression (1,5) relativement aux transformations unitaires.

I. La forme hermitienne prend exclusivement des valeurs réelles.

II. Toutes ses valeurs caractéristiques sont réelles. On peut donc les ranger en une suite croissante

(1,12) $$s_1\leqslant s_2\leqslant\ldots\leqslant s_p.$$

---

[4]) Cf. p. ex. O. Schreier und E. Sperner, *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra*, t. 2 (Leipzig 1935), p. 100.

III. En désignant par m et M respectivement le minimum et le maximum de la forme Q (cf. 1,1) sur la sphère

$$\sum_{\alpha} |\xi_\alpha|^2 = 1 \tag{1,13}$$

et par $\widetilde{m}$ et $\widetilde{M}$ le minimum et le maximum de la fonction

$$\frac{Q}{\sum |\xi_\alpha|^2} \tag{1,14}$$

envisagée pour les points $\{\xi_\alpha\}$ satisfaisant à l'inégalité

$$\sum |\xi_\alpha|^2 \neq 0 \tag{1,15}$$

on a

$$m = \widetilde{m} = s_0, \quad M = \widetilde{M} = s_p. \tag{1,16}$$

IV. La condition nécessaire et suffisante pour que

$$\gamma \leqslant s_1 \tag{1,17}$$

consiste en ce que l'inégalité

$$\gamma \sum |\xi_\alpha|^2 \leqslant Q \tag{1,18}$$

ait lieu pour tous les $\{\xi_\alpha\}$ complexes ou bien pour tous les $\{\xi_\alpha\}$ de la sphère (1,13).

V.

$$\operatorname{Det}(a_{\alpha\beta}) = s_1, s_2 \dots s_p. \tag{1,19}$$

VI. Dans le cas des coeffitients $a_{\alpha\beta}$ et des points $\{\xi_\alpha\}$ réels on peut envisager la forme quadratique

$$Q = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta, \quad (a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}). \tag{1,20}$$

En appliquant à cette forme une transformation orthogonale convenable on obtiendra une forme canonique $R = \sum a_{\alpha\alpha} (\check{\xi}_\alpha)^2$.

Les propriétés I—V restent vraies relativement aux formes quadratiques réelles même au cas où l'on suppose que le point variable $\{\xi_\alpha\}$ soit réel.

VII. *Forme métrique et l'allongement inférieur et supérieur d'une suite des fonctions.*

Soit

$$(1{,}21)\qquad g^1(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q),\dots,g^n(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$$

une suite de fonctions (réelles ou complexes) possédant des dérivées partielles continues du premier ordre dans un ensemble ouvert A des variables (respectivement réelles ou complexes) $u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q$.

Considérons la transformation auxiliaire

$$(1{,}22)\qquad w^i = g^i(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)\quad (i=1,\dots,n).$$

Considérons les variables v_β comme fixes (ou plutôt comme paramètres) et construisons les formes différentielles linéaires

$$(1{,}23)\qquad dw^i = \sum_\alpha g^i_{u_\alpha}\, du_\alpha\ ^{5)}\quad (i=1,\dots,n)$$

et la forme hermitienne

$$(1{,}24)\qquad \sum_{i/1}^{n}\left|dw_i\right|^2 = \sum dw_i\,\overline{dw_i} = \sum_i\sum_\alpha\sum_\beta g^i_{u_\alpha}\,\overline{g^i_{u_\alpha}}\,du_\alpha\,\overline{du_\beta} = \sum_i\left|\sum_\alpha g^i_{u_\alpha}\,du_\alpha\right|^2.$$

Cette forme sera dite *forme métrique de la suite des fonctions* (1,21) *relative aux variables* $u_1,\dots,u_p$.

En remplaçant les differentielles du_α par ξ_β nous écrirons cette forme de la façon suivante

$$(1{,}25)\qquad S = \sum_i\left|\sum_\alpha g^i_{u_\alpha}\,\xi_\alpha\right|^2 = \sum_\alpha\sum_\beta a_{\alpha\beta}\,\xi_\alpha\,\overline{\xi}_s$$

où

$$(1{,}26)\qquad a_{\alpha\beta}(u_1,\dots,v_q) = \sum_i g^i_{u_\alpha}\,\overline{g^i_{u_\beta}},\quad \overline{a_{\alpha\beta}} = a_{\beta\alpha}.$$

---

[5]) Nous désignons par $g^i_{u_\alpha}$ la dérivée partielle $\dfrac{\partial g^i}{\partial u_\alpha}$.

On a

(1,27) $$S \geqslant 0$$

et, par suite, les racines caractéristiques de cette forme, c.-à-d. les racines de l'équation

(1,28) $$\operatorname{Det}(a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} s) = 0$$

sont non négatives (cf. III)

(1,29) $$0 \leqslant s_1(u_1, \dots, v_q) \leqslant s_2(u_1, \dots, v_q) \leqslant \dots \leqslant s_p(u_1, \dots, v_q).$$

Les nombres

(1,30) $$\underline{\mathrm{all}}_u(g; u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) = \sqrt{s_1(u_1, \dots, v_q)}$$

(1,31) $$\overline{\mathrm{all}}_u(g; u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) = \sqrt{s_p(u_1, \dots, v_q)}$$

seront appellés respectivement *allongement inférieur* et *supérieur* au point $(u_1, \dots, v_q)$ de la suite (1,21), relatifs aux variables $u_1, \dots, u_p$ [6]).

On définit pareillement les allongements relatifs aux variables $v_1, \dots, v_q$,

(1,32) $$\overline{\mathrm{all}}_v(g; u_1, \dots, v_q), \quad \underline{\mathrm{all}}_v(g; u_1, \dots, v_q).$$

En vertu de III, IV et V on a les propriétés suivantes:

VIII. En désignant par m et M respectivement le minimum et le maximum de la forme S (cf. 1,25) sur la sphère (1,13) et par $\widetilde{m}$ et $\widetilde{M}$ le minimum et le maximum de la fonction

$$\frac{S}{\sum |\xi_\alpha|^2}$$

envisagée pour les points $\{\xi_\alpha\}$ satisfaisant à l'inégalité (1,15) on a

(1,33) $$\underline{\mathrm{all}}_u(g; u_1, \dots, v_q) = \sqrt{m} = \sqrt{\widetilde{m}},$$

(1,34) $$\overline{\mathrm{all}}_u(g; u_1, \dots, v_q) = \sqrt{M} = \sqrt{\widetilde{M}}.$$

---

[6]) V. plus loins (p. 96, XIX) une définition géométriques des deux allongements.

IX. Considérons les systèmes des conditions

$$(1,35) \qquad \eta_i = \sum_\alpha g^i_{u_\alpha} \xi_\alpha (i=1,\dots,n), \quad \sum_\alpha |\xi_\alpha|^2 \neq 0.$$

$$(1,36) \qquad \eta_i = \sum_\alpha g^i_{u_\alpha} \xi_\alpha (i=1,\dots,n), \quad \sum_\alpha |\xi_\alpha|^2 = 1.$$

Les allongements $\underline{\mathrm{all}}_u(g; u_1,\dots, v_q)$ et $\overline{\mathrm{all}}_u(g; u_1,\dots, v_q)$ sont égaux respectivement au minimum et au maximum de la fonction

$$(1,37) \qquad \frac{\sqrt{\sum_i |\eta_i|^2}}{\sqrt{\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2}}$$

envisagée pour les $\{\xi_\alpha\}$ et $\{\eta_i\}$ satisfaisant à la condition (1,35) ou bien à la condition (1,36).

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$(1,38) \qquad \gamma \leqslant \underline{\mathrm{all}}_u(g; u_1,\dots, v_q)$$

consiste en ce que l'on ait

$$(1,39) \qquad \gamma \sqrt{\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2} \leqslant \sqrt{\sum_i |\eta_i|^2}$$

pour tous les $\{\xi_\alpha\}$, $\{\eta_i\}$ satisfaisant à (1,35) ou à (1,36).

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$(1,40) \qquad \overline{\mathrm{all}}_u(g; u_1,\dots, v_q) \leqslant \delta$$

consiste en ce que l'on ait

$$(1,41) \qquad \sqrt{\sum_i |\eta_i|^2} \leqslant \delta \sqrt{\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2}$$

pour tous les $\{\xi_\alpha\}$, $\{\eta_i\}$ satisfaisant à (1,35) ou bien à (1,36).

IX bis. Supposons que les fonctions (1,21) (réelles au complexes des variables réelles au complexes) possèdent des dérivées partielles continues du premier ordre dans un ensemble ouvert et *convexe* A et que, dans cet ensemble, on ait l'inégalité

$$\overline{\mathrm{all}}_v\,(g; u_1,\dots, v_q) \leqslant k < +\infty.$$

Ceci étant admis on a pour deux points quelconques de A des coordonnées $(u_1, \dots, u_p, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q)$ et $(u_1, \dots, u_p, \bar{\bar{v}}_1, \dots, \bar{\bar{v}}_q)$ l'inégalité

$$\sqrt{\sum_{i/1}^{n} | g^i(u_1, \dots, u_p, \bar{\bar{v}}_1, \dots, \bar{\bar{v}}_q) - g^i(u_1, \dots, u_p, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q) |^2} \leqslant$$

$$\leqslant k \sqrt{\sum_{\beta/1}^{q} | \bar{\bar{v}}_\beta - \bar{v}_\beta |^2},$$

c.-à-d. la suite (1,21) satisfait, relativement aux variables $v_1, \dots, v_q$ à la condition de LIPSCHITZ avec la constante k.

Posons, en effet,

$$\varphi_i(t) = g^i(u_1, \dots, u_p, \bar{v}_1 + t(\bar{\bar{v}}_1 - \bar{v}_1), \dots, \bar{v}_q + t(\bar{\bar{v}}_q - \bar{v}_q)).$$

On a

$$\varphi_i'(t) = \sum_\beta g^i_{v_\beta}(u_1, \dots, \bar{v}_q + t(\bar{\bar{v}}_q - \bar{v}_q)) (\bar{\bar{v}}_\beta - \bar{v}_\beta)$$

donc en raison de IX (cf. 1,40) et (1,41))

$$\sqrt{\sum_i | \varphi_i'(t) |^2} \leqslant k \sqrt{\sum_\beta | \bar{\bar{v}}_\beta - \bar{v}_\beta |^2}.$$

En posant $\varphi_j(t) = \hat{\varphi}_j(t) + i \tilde{\psi}_j(t)$ (ou $\hat{\varphi}_j$ et $\tilde{\psi}_j$ sont réelles) on aura $\varphi_j' = \hat{\psi}_j' + i \tilde{\varphi}_j'$ et, par suite,

$$\sqrt{\sum_j [\hat{\varphi}_j'(t)]^2 + [\tilde{\varphi}_j'(t)]^2} \leqslant k \sqrt{\sum_\beta | \bar{\bar{v}}_\beta - \bar{v}_\beta |^2}.$$

Considérons, dans l'espace réel à $2n$ dimensions la courbe $\hat{x}_i = \hat{\varphi}_i(t)$, $\tilde{x}_i = \tilde{\varphi}_i(t)$. Comme la longuer de l'arc joignant deux points ne peut pas être plus petite que la longueur de sa corde on aura

$$\sqrt{\sum_i | g^i(u_1, \dots, \bar{\bar{v}}_q) - g^i(u_1, \dots, \bar{v}_q) |^2} = \sqrt{\sum_i | \varphi_i(1) - \varphi_i(0) |^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_i [\{\hat{\varphi}_i(1) - \hat{\varphi}_i(0)\}^2 + \{\tilde{\varphi}_i(1) - \tilde{\varphi}_i(0)\}^2]} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \sqrt{\sum_i \{[\hat{\varphi}_i'(t)]^2 + [\tilde{\varphi}_i'(t)]^2\}}\, dt \leqslant k \sqrt{\sum_\beta | \bar{\bar{v}}_\beta - \bar{v}_\beta |^2}$$

c. q. f. d.

X. On a (cf. 1,26)

$$(1,42) \qquad s_1 s_2 \dots s_p = \operatorname{Det}(a_{\alpha\beta}).$$

Au cas $p = n$ on a

$$(1,43) \qquad \begin{aligned} \operatorname{Det}(a_{\alpha\beta}) &= \operatorname{Det}(g^i_{u_\alpha}) \cdot \operatorname{Det}(\overline{g^i_{u_\beta}}) = \\ &= \operatorname{Det}(g^i_{u_\alpha}) \cdot \overline{\operatorname{Det}(g^i_{u_\beta})} = |\operatorname{Det}(g^i_{u_\alpha}|)^2. \end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que

$$(1,44) \qquad \operatorname{Det}(g^i_{u_\alpha}) \neq 0$$

consiste donc en ce que (cf. 1,29 et 1,30)

$$(1,45) \qquad \underline{\mathrm{all}}_u(g; u_1, \ldots, v_q) > 0.$$

En vertu de VI on obtient la propriété suivante:

XI. Dans le cas des fonctions g^i (cf. 1,21) et des variables $(u_1, \ldots, v_q)$ réelles les propriétés VIII et IX restent vraies ou cas où l'on suppose que les variables $\{\xi_\alpha\}$ et $\{\eta_i\}$ soient réelles.

XII. *Une limitation de l'allongement supérieur et inférieur.* On a les inégalités

$$(1,46) \qquad \overline{\mathrm{all}}_u(g; u_1, \ldots, v_q) \leqslant \sqrt{\sum_{i/1}^{n} \sum_{\alpha/1}^{p} |g^i_{u_\alpha}|^2},$$

$$(1,47) \qquad \underline{\mathrm{all}}_u(g; u_1, \ldots, v_q) \geqslant \frac{\sqrt{\operatorname{Det} a_{\alpha\beta}}}{\left(\sqrt{\sum_{i/1}^{n} \sum_{\alpha/1}^{p} |g^i_{u_\alpha}|^2}\right)^{n-1}}$$

où $a_{\alpha\beta}$ est défini par (1,26).

Dans le cas $n = p$ on a

$$(1,48) \qquad \underline{\mathrm{all}}_u(g; u_1, \ldots, v_q) \geqslant \frac{|\operatorname{Det} g^\beta_{u_\alpha}|}{\left(\sqrt{\sum_{\alpha/1}^{p} \sum_{\beta/1}^{\beta} |g^\beta_{u_\alpha}|^2}\right)^{n-1}}.$$

Supposons, en effet, que les $\{\xi_\alpha\}$ et $\{\eta_i\}$ satisfassent à la condition (1,35). On aura, en raison de l'inégalité de Lagrange

$$|\eta_i| \leqslant \sum_\alpha |g^i_{u_\alpha}| \, |\xi_\alpha| \leqslant \sqrt{\sum_\alpha |g^i_{u_\alpha}|^2} \sqrt{\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2},$$

$$\sqrt{\sum |\eta_i|^2} \leqslant \sqrt{\left(\sum_\alpha \sum_i |g^i_{u_\alpha}|^2\right)} \sqrt{\left(\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2\right)}$$

d'où il résulte (1,46) en vertu de IX (cf. 1,41). On a en vertu de (1,42)

$$s_1\, s_2 \dots s_p = \operatorname{Det}(a_{\alpha\beta})$$

et, par suite, en raison de (1,30) et (1,31)

(1,49) $$[\underline{\mathrm{all}}_u(g;\dots)]^2\,[\overline{\mathrm{all}}_u\,(g;\dots)]^{2(n-1)} \geqslant \operatorname{Det}(a_{\alpha\beta})$$

d'où résulte (1,47) en vertu de (1,46). L'inégalité (1,47), entraîne (1,48) en raison de (1,43).

XIII. On a

(1,50) $$\sqrt{\sum_{i/1}^{n} |g^i_{u_\beta}|^2} \leqslant \overline{\mathrm{all}}_u(g;\, u_1, \dots, v_q).$$

Posons en effet $\xi_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$ dans les relations (1,35) et substituons les $\{\xi_\alpha\}$ et $\{\eta_i\}$ ainsi obtenus dans l'expression (1,37). Cette expression ne pouvant pas dépasser $\overline{\mathrm{all}}_u(g,\dots)$ on obtient l'inégalité (1,40).

XIV. Supposons que

(1,51) $$\underline{\mathrm{all}}_u(g;\, u_1, \dots, v_q) \geqslant \omega > 0,$$

(1,52) $$\overline{\mathrm{all}}_v(g;\, u_1, \dots, v_q) \leqslant \Omega,$$

(1,53) $$\sum_{\alpha/1}^{p} g^i_{u_\alpha}\, \xi_\alpha + \sum_{\beta/1}^{q} g^i_{v_\beta}\, \vartheta_\beta = 0.$$

Nous affirmons que

(1,54) $$\sqrt{\sum_{\alpha/1}^{p} |\xi_\alpha|^2} \leqslant \frac{\Omega}{\omega} \sqrt{\sum_{\alpha/1}^{q} |\vartheta_\beta|^2}.$$

Posons en effet

$$\eta_i = \sum_\alpha g^i_{u_\alpha}\, \xi_\alpha.$$

En vertu de (1,53) il en viendra

$$-\eta_i = \sum_\beta g^i_{v_\beta}\, \vartheta_\beta.$$

Ces dernières relations rapprochées respectivement de (1,51) et de (1,52) donnent en vertu de IX (1,39 et 1,41)

$$\omega\sqrt{\sum_\alpha|\xi_\alpha|^2}\leqslant\sqrt{\sum_i|\eta_i|^2},$$
$$\sqrt{\sum_i|\eta_i|^2}\leqslant\Omega\sqrt{\sum_\beta|\vartheta_\beta|^2},$$

ce qui entraîne (1,54).

XV. À côté de la suite (1,21) considérons la suite

$$h^1(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q),\dots,\quad h^n(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$$

et supposons que ces fonctions possèdent dans A des dérivées partielles continues du premier ordre.

Considérons en outre la suite

$$g^1(u_1,\dots,v_q)+h^1(u_1,\dots,v_q),\dots,\quad g^n(u_1,\dots,v_q)+h^n(u_1,\dots,v_q).$$

Ceci étant admis, on aura, entre les allongement de ces trois suites, les relations suivantes

(1,55) $$\overline{\mathrm{all}}_u(g+h;u_1,\dots,v_q)\leqslant\overline{\mathrm{all}}_u(g;\dots)+\overline{\mathrm{all}}_u(h;\dots),$$

(1,56) $$\underline{\mathrm{all}}_u(g+h;\dots)\geqslant\underline{\mathrm{all}}_u(g;\dots)-\overline{\mathrm{all}}_u(h;\dots).$$

Considérons, pour le prouver, les expressions

$$\beta_i=\sum_\alpha g^i_{u_\alpha}\,\xi_\alpha\quad(i=1,\dots,n)$$
$$\gamma_i=\sum_\alpha h^i_{u_\alpha}\,\xi_\alpha\quad(i=1,\dots,n)$$
$$\delta_i=\beta_i+\gamma_i=\sum_\alpha(g^i_{u_\alpha}+h^i_{u_\alpha})\,\xi_\alpha\quad(i=1,\dots,n)$$
$$\text{où }\sum_\alpha|\xi_\alpha|^2>0.$$

On a

(1,57) $$\frac{\sqrt{\sum|\delta_i|^2}}{\sqrt{\sum|\xi_\alpha|^2}}\leqslant\frac{\sqrt{\sum|\beta_i|^2}}{\sqrt{\sum|\xi_\alpha|^2}}+\frac{\sqrt{\sum|\gamma_i|^2}}{\sqrt{\sum|\xi_\alpha|^2}}\ {}^{7)}$$

(1,58) $$\frac{\sqrt{\sum|\beta_i|^2}}{\sqrt{\sum|\xi_\alpha|^2}}-\frac{\sqrt{\sum|\gamma_i|^2}}{\sqrt{\sum|\xi_\alpha|^2}}\leqslant\frac{\sqrt{\sum|\delta_i|^2}}{\sqrt{\sum|\xi_\alpha|^2}}.$$

---

7) Envisageons dans l'espace complexe les points $B=(\beta_1,\dots,\beta_n)$, $C=(-\gamma_1,\dots,-\gamma_n)$, $\Omega=(0,\dots,0)$ et désignons par $\varrho(X,Y)=\sqrt{\Sigma|x_i-y_i|^2}$ la distance des points $X=(x_1,\dots,x_n)$ et $Y=(y_1,\dots,y_n)$. Les inégalités (1,57) et (1,58) résultent immédiatement des inégalités bien connues

$$\varrho(B,C)\leqslant\varrho(B,\Omega)+\varrho(\Omega,C);\ \varrho(B,\Omega)-\varrho(C,\Omega)\leqslant\varrho(B,C).$$

Choisissons, ce qui est possible en raison de IX, les ξ_α de façon que l'on ait

$$\frac{\sqrt{\sum|\delta_i|^2}}{\sqrt{\sum|\xi_\alpha|^2}}=\overline{\text{all}}_u(g+h;\ldots).$$

En raison de IX et (1,57) il en viendra que

$$\overline{\text{all}}_u(g+h;\ldots)\leqslant\frac{\sqrt{\sum|\beta_i|^2}}{\sqrt{\sum|\xi_\alpha|^2}}+\frac{\sqrt{\sum|\gamma_i|^2}}{\sqrt{\sum|\xi_\alpha|^2}}\leqslant\overline{\text{all}}_u(g,\ldots)+\overline{\text{all}}_u(h;\ldots).$$

Choisissons maintenant les ξ_α de façon que l'on ait

$$\frac{\sqrt{\sum|\delta_i|^2}}{\sqrt{\sum|\xi_\alpha|^2}}=\underline{\text{all}}_u(g+h;\ldots).$$

En s'appuyant sur (1,58) et sur IX on en déduira l'inégalité (1,56).

XVI. Considérons deux suites de fonctions

$$f_i(y_1,\ldots,y_n)\quad(i=1,\ldots,n)$$
$$\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)\quad(i=1,\ldots,n)$$

qui possèdent des dérivées partielles continues dans les ensembles ouverts A et B de l'espace complexe ou réel. Supposons que, pour certains points $(x_1,\ldots,x_n)$ et $(y_1,\ldots,y_n)$ on ait

(1,59) $$\sum_{j/1}^{n}f^i_{y_j}\varphi^j_{x_\varkappa}=\delta_{i\varkappa}\quad(i,\varkappa=1,\ldots,n).$$

Ceci étant admis, on a, en ces points, les égalités

(1,60) $$\overline{\text{all}}_y(f;y_1,\ldots,y_n)=\frac{1}{\underline{\text{all}}_x(\varphi;x_1,\ldots,x_n)},$$

(1,61) $$\underline{\text{all}}_y(f;y_1,\ldots,y_n)=\frac{1}{\overline{\text{all}}_x(\varphi;x_1,\ldots,x_n)}.$$

Il résulte en effet de (1,59) que

$$\text{Det}(f^i_{y_j})\cdot\text{Det}(\varphi^j_{x_\varkappa})=1$$

et que les deux systèmes d'équations

(1,62) $$\xi_i = \sum_j f^i_{y_j} \eta_j \quad (i=1,\dots,n)$$

(1,63) $$\eta_i = \sum_\varkappa \varphi^i_{x_\varkappa} \xi_\varkappa \quad (i=1,\dots,n)$$

sont équivalents. Pour les solutions quelconques $\xi_1,\dots,\eta_n$ de ces systèmes les inégalités

(1,64) $$\sum |\xi_i|^2 > 0,$$

(1,65) $$\sum |\eta_i|^2 > 0$$

ne peuvent avoir lieu qu'à la fois.

La fonction

$$\frac{\sqrt{\sum |\xi_i|^2}}{\sqrt{\sum |\eta_i|^2}}$$

des variables $\xi_1,\dots,\eta_n$ considérée pour les valeurs remplissant le système (1.62) et satisfaisant à l'inégalité (1,64) prend la valeur maxima μ en un certain point

(1,66) $$\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\eta}_n.$$

On aura

$$\sum |\tilde{\xi}_i|^2 > 0, \quad \sum |\tilde{\eta}_i|^2 > 0$$

et l'on aura, en vertu de IX

$$\overline{\mathrm{all}}_y(f; y_1,\dots,y_n) = \mu > 0.$$

La fonction

$$\frac{\sqrt{\sum |\eta_i|^2}}{\sqrt{\sum |\xi_i|^2}}$$

considérée pour les valeurs $\xi_1,\dots,\eta_n$ satisfaisant à (1,63) et (1,65) prendra la valeur minima λ évidemment au même point (1,66). On aura donc en vertu de IX

$$0 < \frac{1}{\mu} = \lambda = \underline{\mathrm{all}}_x(\varphi; x_1,\dots,x_n).$$

Il en résulte immédiatement (1,60). La démonstration de (1,61) est toute analogue.

XVII. *Allongements d'une suite des fonctions complexes et de la suite associée des fonctions réelles.*

Soit

$$(1,67) \qquad G^1(u_1,\dots,u_p),\dots,\quad G^n(u_1,\dots,u_p)$$

une suite des fonctions complexes dépendant des variables complexes $\mu_1,\dots,u_p$ et possédant des dérivées partielles continues dans un ensemble ouvert A.

Désignons par $\hat{a}$ et $\tilde{a}$ la partie réelle et imaginaire du nombre a. On aura

$$a=\hat{a}+i\tilde{a} \quad (\hat{a} \text{ et } \tilde{a} \text{ réels}),$$

$$G^j(u_1,\dots,u_p)=\hat{G}^j(u_1,\dots,u_p)+\tilde{G}^j(u_1,\dots,u_p),$$

$$(1,68) \qquad u_\alpha=\hat{u}_\alpha+i\tilde{u}_\alpha.$$

Posons

$$k^j(\hat{u}_1,\dots,\hat{u}_p,\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_p)=\hat{G}^j(\hat{u}_1+i\tilde{u}_1,\dots,\hat{u}_p+i\tilde{u}_p),$$
$$l^j(\hat{u}_1,\dots,\hat{u}_d,\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_p)=\tilde{G}^j(\hat{u}_1+i\tilde{u}_1,\dots,\hat{u}_p+i\tilde{u}_p).$$

La suite des fonctions réelles

$$(1,69) \qquad k^1, l^1, k^2, l^2,\dots, k^p, l^p$$

sera dite associée de la suite (1,67).

Le point $(\hat{u}_1, \tilde{u}_1, \hat{u}_2, \tilde{u}_2,\dots,\hat{u}_p,\tilde{u}_p)$ sera dit associé du point $(u_1, u_2,\dots,u_p)$.

Désignons par

$$\underline{\mathrm{all}}_{(\hat{u},\tilde{u})}(k, l; \hat{\mu}_1, \tilde{u}_1,\dots,\hat{u}_p,\tilde{u}_p)$$
$$\overline{\mathrm{all}}_{(\hat{u},\tilde{u})}(k, l; \hat{\mu}_1, \tilde{u}_1,\dots,\hat{u}_p,\tilde{u}_p)$$

respectivement l'allongement inférieur et supérieur de la suite (1,69) relatifs à toutes les variables $\hat{u}_1, \tilde{u}_2,\dots,\hat{u}_p,\tilde{u}_p$.

Nous affirmons que

$$(1,70) \qquad \begin{aligned} \underline{\mathrm{all}}_{(\hat{u},\tilde{u})}(k, l; \hat{u}_1, \tilde{u}_1,\dots) &= \underline{\mathrm{all}}_u(G; u_1,\dots,u_p),\\ \overline{\mathrm{all}}_{(\hat{u},\hat{v})}(k, l; \hat{u}_1, \tilde{u}_1,\dots) &= \overline{\mathrm{all}}_u(G; u_1,\dots,u_p).\end{aligned}$$

Posons

$$\xi_\alpha = \hat{\xi} + i\tilde{\xi}_\alpha.$$

Les formes métriques des suites (1,67) et (1,69) seront respectivement

$$Q = \sum_j |\sum_\alpha G^j_{u_\alpha} \cdot \xi_\alpha|^2,$$

$$P = \sum_j |\sum_\alpha (k^j_{\hat{u}_\alpha} \hat{\xi}_\alpha + k^j_{\tilde{u}_\alpha} \tilde{\xi}_\alpha)|^2 + \sum_j |\sum_\alpha (l^j_{\hat{u}_\alpha} \hat{\xi}_\alpha + l^j_{\tilde{u}_\alpha} \tilde{\xi}_\alpha)|^2.$$

En se servant des identités

$$G^j_{u_\alpha} = k^j_{\hat{u}_\alpha} + i l^j_{\hat{u}_\alpha} = l^j_{\tilde{u}_\alpha} - i k^j_{\tilde{u}_\alpha},$$

$$|\xi_\alpha|^2 = |\hat{\xi}_\alpha|^2 + \tilde{\xi}_\alpha|^2,$$

on vérifie facilement l'identité

$$\frac{Q}{\sum |\xi_\alpha|^2} = \frac{P}{\sum |\hat{\xi}_\alpha|^2 + \sum |\tilde{\xi}_\alpha|^2}$$

de laquelle résultent immédiatement les relations (1,70) en vertu de IX et de XI.

XVIII. *Remarque.* Dans le cas où les fonctions de la suite (1,67) dépendent des variables μ_α et v_β

$$G^j = G^j(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$$

les formules (1,70) subsistent pour les allongements de cette suites relatifs aux u_α et aux v_β (c.-à-d. pour $\underline{\text{all}}_v(G; \mu_1, \ldots, v_q)$, $\underline{\text{all}}_u(G; u_1 \ldots, v_q)$ etc.).

XIX. *Définition géometrique de l'allongement inférieur et supérieur.*

Supposons, pour simplifier l'écriture, que les fonctions (1,21) ne dépendent pas des v_β. Elles forment la suite

(1,71) $$g^1(u_1, \ldots, u_p), \ldots, \quad g^n(u_1, \ldots u_p).$$

Formons au moyen de ces fonctions la transformation auxiliaire

(1,72) $$z_i = g^i(u_1, \dots, u_p) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Posons pour abréger

$$U = (u_1, \dots, u_p),$$
$$G(U) = (g^1(U), \dots, g^n(U)),$$
$$Z = (z_1, \dots, z_n).$$

La transformation (1,72) pourra être écrite sous la forme

(1,73) $$Z = G(U).$$

La distance des points $A = (a_1, \dots, a_q)$, $B = (b_1, \dots, b_q)$ d'un espace complexe à q dimensions sera désignée par $\varrho(A, B)$

$$\varrho(A, B) = \sqrt{\sum_{\alpha/1}^{q} |b_\alpha - a_\alpha|^2}.$$

Nous supposons que les fonctions complexes ou réelles (1,71) possèdent des dérivées partielles continues dans un ensemble ouvert E des points complexes ou réels.

Soit $\mathring{U} = (\mathring{u}_1, \dots, \mathring{u}_p)$ un point quelconque de E.

Nous affirmons que

(1,74) $$\underline{\mathrm{all}}_u(g; \mathring{u}_1, \dots, \mathring{u}_p) = \liminf_{V=\mathring{U},\, W=\mathring{U}} \frac{\varrho(G(V), G(W))}{\varrho(V, W)},$$

(1,75) $$\overline{\mathrm{all}}_u(g; \mathring{u}_1, \dots, \mathring{u}_p) = \limsup_{V=\mathring{U},\, W=\mathring{U}} \frac{\varrho(G(V), G(W))}{\varrho(V, W)}.$$

où les deuxiemes membres désignent les limites (inférieure et supérieure) que l'on obtient lorsque deux points V et $W (V \neq W)$ variant d'une façon quelconque dans E tendent vers $\mathring{U}$ [8]).

---

[8]) Les formules (1,74) et (1,75) pourraient être envisagées comme une définition géométrique de l'allongement inférieur et supérieur. Dans le deuxième membre de (1,74) et (1,75) intervient le rapport de la distance des images $G(V)$ et $G(W)$ des points V et W (par l'intermédiaire de la transformation 1,73) à la distance de V et W. Ce rapport représente une sorte d'*allongement* des distances engendré par la transformation (1,73).

Démonstration. Considérons la forme métrique S de la suite (1,72) pour $U = \mathring{U}$. On a

(1,75 bis) $$S(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \sum_i \Big| \sum_\alpha g^i_{u_\alpha}(\mathring{U})\, \xi_\alpha \Big|^2.$$

Désignons par m et M le minimum et le maximum de S sur la sphère

(1,76) $$\sum |\xi_\alpha|^2 = 1.$$

On a (cf. 1,33 et 1,34)

(1,77) $$\sqrt{m} = \underline{\mathrm{all}}_u(g; \mathring{u}_1, \ldots, \mathring{u}_p),$$

(1,78) $$\sqrt{M} = \overline{\mathrm{all}}_u(g; \mathring{u}_1, \ldots, \mathring{u}_p).$$

Nous ramènerons la démonstration au lemme suivant:

Lemme. Soient deux suites des points $\{\overset{\nu}{V}\}$, $\{\overset{\nu}{W}\}$, tels que

(1,79) $$\overset{\nu}{V} = (\overset{\nu}{v}_., \ldots, \overset{\nu}{v}_p) \to \mathring{U}; \quad \overset{\nu}{W} = (\overset{\nu}{w}_1, \ldots, \overset{\nu}{w}_p) \to \mathring{W}; \quad \overset{\nu}{V} \neq \overset{\nu}{W},$$

(1,80) $$\overset{\nu}{\lambda}_\alpha = \frac{\overset{\nu}{w}_\alpha - \overset{\nu}{v}_\alpha}{\varrho(\overset{\nu}{V}; \overset{\nu}{W})} \to \xi_\alpha.$$

Ceci étant admis nous affirmons que:

(1,81) $$\frac{\varrho(G(\overset{\nu}{V}), G(\overset{\nu}{W}))}{\varrho(\overset{\nu}{V}, \overset{\nu}{W})} \to \sqrt{S(\xi\ , \ldots, \xi_p)}$$

où (ce qui est évident) $\sum |\xi_\alpha|^2 = 1$.

On a

$$\frac{\varrho(G(\overset{\nu}{V}), G(\overset{\nu}{W}))}{\varrho(\overset{\nu}{V}, \overset{\nu}{W})} = \sqrt{\sum_i \left| \frac{g^i(\overset{\nu}{W}) - g^i(\overset{\nu}{V})}{\varrho(\overset{\nu}{V}, \overset{\nu}{W})} \right|^2}.$$

En raison de (1,75 bis) la démonstration de (1,81) sera établie lorsque l'on aura prouvé que

(1,82) $$\left| \frac{g^i(\overset{\nu}{W}) - g^i(\overset{\nu}{V})}{\varrho(\overset{\nu}{V}, \overset{\nu}{W})} \right| \to \Big| \sum g^i_{u_\alpha}(\mathring{U})\, \xi_\alpha \Big|.$$

Posons, pour un i et ν fixe,

$$\varphi(t) = g^i(\overset{\nu}{v}_1 + t(\overset{\nu}{w}_1 - \overset{\nu}{v}_1), \ldots, \overset{\nu}{v}_p + t(\overset{\nu}{w}_p - \overset{\nu}{v}_p)).$$

On a

$$\left| \frac{g^i(\overset{\nu}{W}) - g^i(\overset{\nu}{V})}{\varrho(\overset{\nu}{V}, \overset{\nu}{W})} \right| = \frac{|\varphi(1) - \varphi(0)|}{\varrho(\overset{\nu}{V}, \overset{\nu}{W})} = \frac{|\int_0^1 \varphi'(t)\, dt|}{\varrho(\overset{\nu}{V}, \overset{\nu}{W})} =$$

$$= \left| \sum_\alpha \frac{\overset{\nu}{w}_\alpha - \overset{\nu}{v}_\alpha}{\varrho(\overset{\nu}{V}, \overset{\nu}{W})} \int_0^1 g^i_{u_\alpha}(\overset{\nu}{v}_1 + t(\overset{\nu}{w}_1 - \overset{\nu}{v}_1), \ldots)\, dt \right|.$$

On voit, en vertu de (1,80) que la relation (1,82) sera établie lorsque l'on aura prouvé que

$$\text{(1,83)} \qquad \int_0^1 g^i_{u_\alpha}(\overset{\nu}{v}_1 + t(\overset{\nu}{w}_1 - \overset{\nu}{v}_1), \ldots)\, dt \to g^i_{u_\alpha}(\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_p).$$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre quelconque. Pour les indices ν suffisamment grands on aura (cf. 1,79) pour tous les t de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$|g^i_{u_\alpha}(\overset{\nu}{v}_1 + t(\overset{\nu}{w}_1 - \overset{\nu}{v}_1), \ldots) - g^i_{u_\alpha}(\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_p)| \leqslant \varepsilon.$$

On a par suite

$$\left| \int_0^1 g^i_{u_\alpha}(\overset{\nu}{v}_1 + t(\overset{\nu}{w}_1 - \overset{\nu}{v}_1), \ldots)\, dt - g^i_{u_\alpha}(\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_p) \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 [g^i_{u_\alpha}(\overset{\nu}{v}_1 + t(\overset{\nu}{w}_1 - \overset{\nu}{v}_1), \ldots) - g^i_{u_\alpha}(\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_p)]\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left| g^i_{u_\alpha}(\overset{\nu}{v}_1 + t_1(\overset{\nu}{w} - \overset{\nu}{v}_1), \ldots) - g^i_{u_\alpha}(\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_p) \right| dt \leqslant \varepsilon.$$

La relation (1,83) se trouve ainsi établie et là démonstration de notre lemme est ainsi terminée.

Posons (cf. 1,74)

$$\text{(1,84)} \qquad \eta = \liminf \frac{\varrho(G(V), G(W))}{\varrho(V, W)}.$$

Choisissons le point $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de façon qu'il satisfasse à (1,76) et que l'on ait (cf. 1,77)

$$S(\xi_1, \ldots, \xi_p) = m.$$

Choisissons maintenant les suites $\overset{\nu}{V}$ et $\overset{\nu}{W}$ de façon que les relations (1,80) soient satisfaites. En vertu de (1,81) et (1,77) il en viendra que

$$\frac{\varrho(G(\overset{\nu}{V}), G(\overset{\nu}{W}))}{\varrho(\overset{\nu}{V}, \overset{\nu}{W})} \to \mathrm{all}_u(g, \overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_p)$$

d'où (cf. 1,84) il résulte que

$$(1{,}85) \qquad \eta \leqslant \underline{\mathrm{all}}_u(g, \overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_p).$$

Choisissons à présent les suites $\overset{\nu}{V}$ et $\overset{\nu}{W}$ de façon que l'on ait (cf. 1,84)

$$\frac{\varrho(G(\overset{\nu}{V}), G(\overset{\nu}{W}))}{\varrho(\overset{\nu}{V}, \overset{\nu}{W})} \to \eta.$$

En remplaçant, au besoin, les suites $\overset{\nu}{V}$ et $\overset{\nu}{W}$ par les suites partielles convenables on aura les relations (1,80) où $(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ est un certain point satisfaisant à (1,76). En raison de (1,81), (1,77) et de la définition de m on a

$$\eta = \sqrt{S(\xi_1, \ldots, \xi_p)} \geqslant \sqrt{m} = \underline{\mathrm{all}}_u(g, \overset{\circ}{u}, \ldots, \overset{\circ}{u}_p).$$

Cette relation, rapprochée de (1,85), donne

$$\eta = \underline{\mathrm{all}}_u(g, \overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_p)$$

et la relation (1,74) se trouve ainsi établie (cf. 1,84).

On établit, dans une voie pareille, la relation (1,75).

§ 2. Limitation du domaine d'existence des fonctions implicites.

Théorème 1. Supposons que les fonctions (réelles ou complexes)

(2,1) $$f^1(x_\alpha, y_j),\ f^2(x_\alpha, y_j), \ldots,\ f^n(x_\alpha, y_j)\ ^{9)}$$

possèdent les dérivées partielles continues du premier ordre

(2,2) $$f^i_{x_\beta}(x_\alpha, y_j),\ f^i_{y_k}(x_\alpha, y_j) \quad (\beta = 1, \ldots, p,\ k = 1, \ldots, n)$$

continues dans l'ensemble L des variables (réelles ou complexes). $x_1, \ldots, x_p,\ y_1, \ldots, y_n$) défini par les inégalités [10])

(2,3) $$\left.\begin{aligned} &\sum_{\alpha/1}^{p} \left| x_\alpha - a_\alpha \right|^2 < r^2 \leqslant +\infty, \\ &\sum_{j/1}^{n} \left| y_j - b_j \right| < R^2 \leqslant +\infty \end{aligned}\right\} (\textit{ensemble } L)$$

et que l'on ait

(2,4) $$f^i(a_\alpha, b_j) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Nous supposons ensuite qu'il existe deux nombres réels fixes et finis Ω et $\omega (\omega > 0)$ tels que l'allongement supérieur (relatif à $x_1, \ldots, x_p$) et l'allongement inférieur [11]) (relatif a $y_1, \ldots, y_n$) de la suite (2,1) remplissent, dans L, les inégalités

(2,5) $$\overline{\text{all}}_x(f; x_\alpha, y_j) \leqslant \Omega \quad (\text{dans } L),$$

(2,6) $$\underline{\text{all}}_y(f; x_\alpha, y_j) \geqslant \omega > 0 \quad (\text{dans } L).$$

Envisageons le système de équations

(2,7) $$f^i(x_\alpha, y_j) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

---

[9]) Nous écrirons $f^i(x_\alpha, y_j)$ au lieu de $f^i(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n)$.

[10]) Nous nous bornons au cas où les fonctions f^i sont définies *exclusivement* dans l'ensemble L. Dans le cas contraire on remplacerait les f^i par les nouvelles fonctions $F^i(x_\alpha, y_j)$ définies exclusivement dans L et telles que l'on ait $F^i \equiv f^i$ dans L.

[11]) Cf. § 1, VII, page 86 (définition analytique de ces allongements) et § 1, XIX, pagc 96 (leur définition géométrique).

Ceci etant admis il existe une suite de fonctions

(2,8) $\varphi^j(x_\alpha) \quad (j = 1, \dots, n)$ [12])

qui

1⁰) sont continues dans la sphère

(2,9) $$\sqrt{\sum_{\beta/1}^{p} \left| x_\beta - a_\beta \right|^2} < \varrho$$

où

(2,10) $$\varrho = \text{minimum}\,(r, \frac{\omega}{\Omega} R)\ ^{13)},$$

2⁰) remplissent les conditions

(2,11) $$\varphi^j(a_\alpha) = b_j \quad (j = 1, \dots, n),$$

3⁰) remplissent dans la sphère (2,9) identiquement les équations

(2,12) $$f^i(x_\alpha, \varphi^j(x_\alpha)) \equiv 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Il existe un système unique des fonctions $\varphi^j(x_\alpha)$ satisfaisant aux conditions 1⁰), 2⁰) et 3⁰). Elles possèdent les dérivées partielles du premier ordre continues dans la sphère (2,9) et elles y remplissent les inégalités

(2,13) $$\overline{\text{all}}_x(\varphi; x_1, \dots, x_p) \leqslant \frac{\Omega}{\omega}\ ^{14)}$$

(2,13 bis) $$\sqrt{\sum_j \left| \varphi^j_{x_\beta}(x_\alpha) \right|^2} \leqslant \frac{\Omega}{\omega} (\beta = 1, \dots, p).$$

---

[12]) Nous écrirons, comme précédemment $\varphi^j(x_\alpha)$ au lieu de $\varphi^j(x_1, \dots, x_p)$.

[13]) Dans le cas $\Omega = 0$ le symbole $\frac{\omega}{\Omega}$ désigne $+\infty$ et dans ce cas on a $\varrho = r$.

[14]) Le premier membre de cette inégalité désigne l'allongement supérieur de la suite (2.8).

Pour deux points quelconques $(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_p)(\overline{\overline{x}}_1, \dots, \overline{\overline{x}}_p)$ de la sphère (2,9) on a

$$(2,14)\qquad \sqrt{\sum_{j/1}^{p} \left|\varphi^j(\overline{x}_\alpha) - \varphi^j(\overline{\overline{x}}_\alpha)\right|^2} \leqslant \frac{\Omega}{\omega} \sqrt{\sum_{\alpha} \left|\overline{\overline{x}}_\alpha - \overline{x}_\alpha\right|^2}.$$

L'idée directrire de la démonstration.

Supposons qu'il existe une suite des fonctions (2,8) satisfaisant aux conditions du théorème. Soit $\{\overline{x}_\alpha\}$ un point de la sphère (2,9). Introduisons dans les premiers membres de l'idendité (2,12) la substitution

$$x_\alpha = a_\alpha + t(\overline{x}_\alpha - a_\alpha)$$

et posons

$$y_j(t) = \varphi^j(a_\alpha + t(\overline{x}_\alpha - a_\alpha)).$$

En différentiant cette identité on obtiendra

$$(2,15)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\beta} f^i_{x_\beta}(a_\alpha + t(\overline{x}_\alpha - a_\alpha), y_j(t))(\overline{x}_\beta - a_\beta) + \\ \qquad + \sum\limits_{j} f^i_{y_j}(a_\alpha + t(\overline{x}_\alpha - a_\alpha), y_j(t)) \cdot \dfrac{dy_j(t)}{dt} = 0, \end{cases}$$

$$(2,16)\qquad y_j(0) = b_j,$$

$$(2,17)\qquad y_j(1) = \varphi^j(\overline{x}_\alpha).$$

La démonstration consistera à suivre la voie inverse. On cherchera une solution $y_j(t)$ du système d'équations différentielles (2,15) satisfaisant à la condition initiale (2,16) et on définira les fonctions φ^j par les formules (2,17). On prouvera qu'elles remplissent les conditions de notre théorème.

Démonstration. **(Cas des variables et fonctions réelles).**

I. En vertu de (2,6) et de la propriété X (cf. 1,44 et 1,45) on a dans L l'inégalité

$$(2,18)\qquad \mathrm{Det}(f^i_{y_j}) \neq 0.$$

II. Supposons que pour tout t d'un intervalle

$$(2,19)\qquad \gamma \leqslant t \leqslant \delta$$

1⁰) les fonctions $x_\alpha(t)$, $y_j(t)$, $\overline{y}_j(t)$ $(a=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,n)$ soient continues,

2⁰) les points variables

$$\{x_\alpha(t), y_j(t)\}\,^{15)} \text{ et } \{x_\alpha(t), \overline{y}_j(t)\}$$

appartiennent à l'ensemble L (cf. 2,3),

3⁰) (2,20) $\quad f^i(x_\alpha(t), y_j(t)) = f^i(x_\alpha(t), \overline{y}_j(t)), \quad (i=1,\ldots,n)$

4⁰) (2,21) $\quad y_j(\gamma) = \overline{y}_j(\gamma) \quad (j=1,\ldots,n).$

Nous affirmons que, dans l'intervalle (2,19), on a

$$(2,22) \qquad y_j(t) = \overline{y}_j(t), \quad (j=1,\ldots,n).$$

Supposons, en effet, que pour un t de l'intervalle (2,19) le système d'égalités (2,22) n'ait pas lieu et désignons par τ la borne inférieure de tels t exceptionnels. On a

$$(2,23) \qquad y_j(\tau) = \overline{y}_j(\tau) \quad (j=1,\ldots,n)$$

et il existe une suite de nombres t_ν tels que $\gamma \leqslant \tau < t_\nu \leqslant \beta$, $t_\nu \to \tau$,

$$(2,24) \qquad \sum_j \overline{y}_j(t_\nu) - y_j(t_\nu))^2 > 0\,.$$

On aura

$$0 = f^i(x_\alpha(t_\nu), \overline{y}_j(t_\nu)) - f^i(x_\alpha(t_\nu), y_j(t_\nu)) =$$

$$= \sum_{\varkappa/1}^{n} f^i_{y_\varkappa}(x_\alpha(t_\nu), y_j(t_\nu) + \vartheta_\nu(\overline{y}_j(t_\nu) - y_j(t_\nu)) \cdot (\overline{y}_j(t_\nu) - y_j(t_\nu)),$$

$$0 \leqslant \vartheta_\nu \leqslant 1\,,$$

d'où, en raison de (2,24)

$$\operatorname{Det}(f^i_{y_\varkappa}(x_\alpha(t_\nu), y_j(t_\nu) + \vartheta_\nu(\overline{y}_j(t_\nu) - y_j(t_\nu)) = 0$$

et à la limite (cf. 2,23)

$$\operatorname{Det}(f^i_{y_\varkappa}(x_\alpha(\tau), y_j(\tau)) = 0$$

contrairement à (2,18).

---

[15]) Nous désignons ainsi le point des coordonnées

$$(x_1(t), \ldots, x_p(t), y_1(t), \ldots, y_n(t)).$$

III. Il existe au plus un système de fonctions $\varphi^j(x_\alpha)$ continues dans la sphère (2,9) et remplissant les conditions (2,11) et (2,12).

Soient, en effet, $\varphi^j(x_\alpha)$ et $\overline{\varphi}^j(x_\alpha)$ deux systèmes de telle sorte et soit $\{\overline{x}_\alpha\}$ un point quelconque de la sphère (2,9). Il suffira de prouver que

$$\varphi^j(\overline{x}_\alpha) = \overline{\varphi}^j(\overline{x}_\alpha), \quad (j = 1, \dots, n). \tag{2,25}$$

Posons, à cet effet, pour $\gamma = 0 \leqslant t \leqslant 1 = \delta$, $x_\alpha(t) = a_\alpha + t(\overline{x}_\alpha - a_\alpha)$, $y_j(t) = \varphi^j(x_\alpha(t))$, $\overline{y}_j(t) = \overline{\varphi}^j(x_\alpha(t))$.

On aura $y^j(0) = \overline{y}_j(0) = \varphi^j(a_\alpha) = \overline{\varphi}^j(a_\alpha) = b_j$.

La condition (2,20) sera satisfaite en raison de (2,12). On aura donc $\overline{y}_j(t) \equiv y_j(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ et en particulier $\overline{y}_j(1) = y_j(1)$, d'où résulte (2,25).

L'unicité des fonctions $\varphi^j(x_\alpha)$ étant ainsi établie, nous passons à la démonstration de leur existence conformément à l'idée directrice présentée au commencement.

IV. Soit $\{\overline{x}_\alpha\}$ un point de la sphère (2,9)

$$\sqrt{\sum (\overline{x}_\alpha - a_\alpha)^2} < \varrho = \min\left(r, \frac{\omega}{\Omega} R\right). \tag{2,26}$$

Envisageons (autrement que dans la formule 2,15) le système suivant des équations *numériques* (et *non pas différentielles*)

$$\begin{aligned} &\sum_\beta f^i_{x_\beta}(a_\alpha + t(\overline{x}_\alpha - a_\alpha), y_j)(\overline{x}_\beta - a_\beta) + \\ &+ \sum_k f^i_{y_k}(a_\alpha + t(\overline{x}_\alpha - a_\alpha), y_j)\, p_k = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{2,27}$$

Dans les premiers membres de ce système figurent des fonctions qui sont bien déterminées dans l'ensemble ouvert des points $\{t, y_j, p_j\}$

$$\begin{cases} |t| < \dfrac{r}{\sqrt{\sum(\overline{x}_\alpha - a_\alpha)^2}}\,{}^{16)}, \\ |y_j| < R, \end{cases} \tag{2,28}$$

$$p_1, \dots, p_n \text{ quelconques.} \tag{2,29}$$

---

16) Nous posons $\dfrac{r}{\sqrt{\sum(\overline{x}_\alpha - a_\alpha)^2}} = +\infty$ lorsque $\sum(\overline{x}_\alpha - a_\alpha)^2 = 0$.

En vertu de (2,18) le système (2,27) pourra être résolu en p_j pour tous les $\{t, y_j\}$ de l'ensemble (2,28). Cette solution sera de la forme

$$(2,30)\qquad p_j = g^j(t, y_k, \bar{x}_\alpha) \quad (j = 1, \dots, n)$$

et les fonctions g^j seront continues dans l'ensemble (2,28).

Les systèmes d'équations numériques (2,27) et (2,30) sont équivalents. On aura dans l'ensemble (2,28) les identites

$$(2,31)\qquad \begin{aligned} &\sum_\beta f^i_{x_\beta}(a_\alpha + t(\bar{x}_\alpha - a_\alpha), y_j)(\bar{x}_\beta - a_\beta) + \\ &+ \sum_j f^i_{y_j}(a_\alpha + t(\bar{x}_\alpha - a_\alpha), y_j)\, g^j(t, y_k, \bar{x}_\alpha) \equiv 0, \\ &(i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Ce système d'identités rapproché de (2,5) et (2,6) conduit, en vertu de la propriété XIV du § 1 à l'inégalité

$$(2,32)\qquad \sqrt{\sum_j [g^j(t, y_k, \bar{x}_\alpha)]^2} \leqslant \frac{\Omega}{\omega} \sqrt{\sum_\beta (\bar{x}_\beta - a_\beta)^2} < \frac{\Omega}{\omega} \varrho \leqslant R$$

qui est valable dans l'ensemble (2,28).

V. Introduisons maintenant les deux systèmes d'équations différentielles

$$(2,33)\qquad \begin{aligned} &\sum_\beta f^i_{x_\beta}(a_\alpha + t(\bar{x}_\alpha - a_\alpha), y_k(t))(\bar{x}_\beta - a_\beta) + \\ &+ \sum_j f^i_{y_j}(a_\alpha + t(\bar{x}_\alpha - a_\alpha), y_k(t)) \frac{dy_j(t)}{dt} = 0, \\ &(i = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

$$(2,34)\qquad \frac{dy_j(t)}{dt} = g^j(t, y_\varkappa(t), \bar{x}_\alpha) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Ces deux systèmes sont évidemment équivalents. Le long de chaque intégrale du système (2,33) ou (2,34) on a

$$(2,35)\qquad \frac{d}{dt} f^i(a_\alpha + t(\bar{x}_\alpha - a_\alpha), y_k(t)) \equiv 0 \text{ [17]} \quad (i = 1, \dots, n)$$

[17]) En effet: en effectuant la différentiation du premier membre de (2.35) on obtient le premier membre de (2.33).

et par suite

(2,36) $$f^i(a_\alpha + t(\overline{x}_\alpha - a_\alpha), y_k(t)) = \text{const.}$$

VI. Soit

(2,37) $$y_k = y_k(t) \quad (k = 1, \dots, n)$$

une intégrale quelconque du système (2,33) (ou, ce qui revient au même, du système 2,34), telle que

(2,38) $$y_k(0) = b_k.$$

Nous affirmons que cette intégrale peut être prolongée de façon qu'elle existe dans l'intervalle

(2,39) $$0 \leqslant t < \frac{\varrho}{\sqrt{\sum(\overline{x}_\alpha - a_\alpha)^2}}$$

et, à plus forte raison (cf. 2,26), dans l'intervalle

(2,40) $$0 \leqslant t \leqslant 1.$$

On sait que l'intégrale (2,37) peut être prolongée à un intervalle

(2,41) $$0 \leqslant t < T$$

de façon qu'elle tende vers la frontière de l'ensemble (2,28), lorsque $t \to T$[18]). Il suffit de prouver que $T \geqslant \frac{\varrho}{\sqrt{\sum(\overline{x}_\alpha - a_\alpha)^2}}$.
Supposons, pour une démonstration par l'impossible, que

(2,42) $$T < \frac{\varrho}{\sqrt{\sum(\overline{x}_\alpha - a_\alpha)^2}}.$$

La longueur de la corde d'un arc étant au plus égale à la longueur de cet arc on aura pour tous les t de l'intervalle (2,41) (cf. (2,34), (2,32), (2,42), (2,10))

---

[18]) Cf. E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen* (Leipzig 1930), p. 135, Satz. 2. Il faut tenir compte de ce que les fonctions g_j intervenant dans (2,34) sont définies et continues dans l'ensemble (2,28).

$$\sqrt{\sum (y_i(t)-b_i)^2} = \sqrt{\sum (y_i(t)-y_i(0))^2} \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_0^t \sqrt{\sum \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2}\, dt \right| = \left| \int_0^t \sqrt{\sum (g^i)^2}\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant t\frac{\Omega}{\omega}\sqrt{\sum (\bar{x}_\alpha - a_\alpha)^2} \leqslant T\frac{\Omega}{\omega}\sqrt{\sum (\bar{x}_\alpha - a_\alpha)^2} = U < \varrho\frac{\Omega}{\omega} \leqslant R.$$

On a donc pour les t de l'intervalle (2,41) (cf. 2,42 et 2,10)

$$0 \leqslant t < T < \frac{r}{\sqrt{\sum (\bar{x}_\alpha - a_\alpha)^2}}, \quad \sqrt{\sum (y_i(t)-b_i)^2} \leqslant U < R$$

d'où il résulte que l'intégrale (2,37) ne peut pas tendre vers la frontière de l'ensemble (2,28) lorsque $t \to T$, ce qui constitue une contradiction. Cas où $\bar{x}_\alpha = a_\alpha$ est plus facile car alors $g^i \equiv 0$ (cf. 2,31).

VII. Nous affirmons que par tout point $t=\gamma$, $y_\varkappa = \eta_\varkappa$ de l'ensemble (2,28) il passe une intégrale *unique* du système (2,33) (ou 2,34).

Soient, en effet, $y_\varkappa = y_\varkappa(t)$ et $y_\varkappa = \bar{y}_\varkappa(t)$ deux intégrales d'une telle sorte qui sont valables dans un intervalle (2,19). Elles vérifient les relations (2,21). Les deux intégrales vérifient dans (2,19) l'identité (2,36) avec les mêmes constantes (en raison de (2,21). Elle vérifient, par suite, les relations (2,20) et, en vertu de la proposition II (insérée à la présente démonstration), aussi les identités (2,22) dans l'intervalle (2,19), ce qui termine la démonstration de l'unicité.

VIII. Nous désignons par

(2,43) $$y_i = \psi^i(t, \tau, \eta_j, \bar{x}_\alpha) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

l'unique intégrale du système (2,33) (ou 2,34) passant par le point $t = \tau$, $y_j = \eta_j$ de l'ensemble (2,28). L'intervalle maximal de l'existence de cette intégrale sera de la forme

(2,44) $$A(\tau, \eta_j, \bar{x}_\alpha) < t < B(\tau, \eta_j, \bar{x}_\alpha)\ ^{19}).$$

[19]) Cet intervalle sera ouvert car l'intégrale (2,43) tend vers la frontière de l'ensemble *ouvert* (2,28) lorsque t tend vers A ou B et le point initial (τ, η_j) appartient à l'ensemble (2,28).

Or en vertu de l'unicité en question et de la continuité des fonctions g^j (intervenant dans 2,34) les fonctions ψ^i sont continues [20]) dans l'ensemble Z des points ou elles sont définies c.-à-d. dans l'ensemble défini par les inégalités

$$\sqrt{\sum(\bar{x}_\alpha - a_\alpha)^2} < \varrho, \quad \sqrt{\sum(\eta_j - b_j)^2} < R, \quad |\tau| < \frac{r}{\sqrt{\sum(\bar{x}_\alpha - a_\alpha)^2}},$$

$$A(\tau, \eta_j, \bar{x}_\alpha) < t < B(\tau, \eta_j, \bar{x}_\alpha).$$

On a évidemment pour les points $\{\tau, \eta_j\}$ apartenant à l'ensemble (2,28) les identités

(2,45) $$\psi^i(\tau, \tau, \eta_j, \bar{x}_\alpha) \equiv \eta_i.$$

Or l'intégrale

(2,46) $$y^j = \psi^j(t, 0, b_\varkappa, \bar{x}_\alpha)$$

passe par le point $t = 0$, $y_j = b_j$ donc

(2,46 bis) $$\psi^j(0, 0, b_\varkappa, \bar{x}_\alpha) = b_j.$$

On a donc en vertu de (2,36) et (2,4)

$$f^i(a_\alpha + t(\bar{x}_\alpha - a_\alpha), \psi^j(t, 0, b_\varkappa, \bar{x}_\alpha)) \equiv f^l(a_\alpha, b_j) = 0$$

dans l'intervalle dans lequel l'intégrale (2,46) existe. Mais cette intégrale existe dans les intervalles (2,39) et (2,40) et en particulier pour $t = 1$. On a donc

(2,47) $$f^i(\bar{x}_\alpha, \psi^j(1, 0, b_\varkappa, \bar{x}_\alpha) \equiv 0$$

pour tous les $(\bar{x}_\alpha)$ de la sphère (2,9) (cf. 2,26). Nous prouverons que

(2,48) $$\psi^j(1, 0, b_\varkappa, a_\alpha) = b_j.$$

En effet, la suite des fonctions

$$y_j = \psi^j(t, 0, b_\varkappa, a_\alpha)$$

---

[20]) E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen* (Leipzig 1930) p. 150, Satz 4.

constitue la solution du système (2,33) correspondant aux valeurs $\bar{x}_\alpha = a_\alpha$ c.-à.-d. du système

$$\sum_j f^i_{y_j}(a_\alpha, y_\varkappa(t)) \frac{dy_j(t)}{dt} = 0$$

d'où il résulte (cf. 2,18) que $\frac{dy_j(t)}{dt} = 0$, $y_j(t) = \text{const}$ et par suite

$$\psi^j(t, 0, b_\varkappa, \bar{a}_\alpha) = \psi^j(0, 0, b_\varkappa, a_\alpha) = b_j.$$

En y posant $t = 1$ on en obtient (2,48).

Remplaçons les $\bar{x}_\alpha$ par x_α et posons

$$\varphi^j(x_\alpha) = \psi^j(1, 0, b_\varkappa, x_\alpha).$$

Les fonctions $\varphi^j(x_\alpha)$ sont continues dans la sphère (2,9) (en vertu de la continuité des fonctions 2,43) et elles y remplissent (cf. 2,47 et 2,48) les relations

$$f^i(x_\alpha, \varphi^j(x_\alpha)) \equiv 0, \quad \varphi^j(a_\alpha) = b_j$$

c.-à.-d. les relations (2,11) et (2,12). La première partie de notre théorème se trouve ainsi établie.

IX. Le fait que les fonctions $\varphi^j(x_\alpha)$ possèdent, dans la sphère (2,9) les dérivées partielles continues du premier ordre peut être établi dans la voie classique insérée dans tous les Cours d'analyse.

X. Nous procédons à la démonstration de (2,13), (2,13 bis) et (2,14).

Posons

(2,49) $$\eta_i = \sum_{\alpha/1} \varphi^i_{x_\alpha} \xi_\alpha \quad (i = 1, \dots, n).$$

On a

$$f^i_{x_\alpha} + \sum_j f^i_{y_j} \varphi^j_{x_\alpha} \equiv 0$$

et, par suite,

$$\sum_\alpha f^i_{x_\alpha} \xi_\alpha + \sum_j f^i_{y_j} \eta_j = 0\,.$$

En raison de (2,5) et (2,6) on en obtiendra en s'appuyant sur la proposition XIV du § 1

$$\sqrt{\sum |\eta_j|^2} \leqslant \frac{\Omega}{\omega} \sqrt{\sum |\xi_\alpha|^2}.$$

Cette inégalité étant juste pour tous les $\{\xi_\alpha, \eta_i\}$ remplissant (2,49), on en déduira (2,13) en faisant appel au § 1, IX (cf. 1,40 et 1,41).

L'inégalité (2,13) entraîne (2,13 bis) et (2,14) respectivement en vertu du § 1, XIII et du § 1, IX bis.

Cas des fonctions et variables complexes.

XI. Supposons maintenant que les variables x_α, y_j et les fonctions f^i soient complexes. Nous ramènerons ce cas au cas des fonctions et variables réelles en remplaçant les fonctions (2,1) par les fonctions réelles associées (cf. § 1, XVII, page 95).

Posons

(2,50) $$x = \hat{x}_\alpha + i\,\widetilde{x}_\alpha, \quad y_j = \hat{y}_j + i\,\widetilde{y}_j$$

(2,51) $$f^i(x_\alpha, y_j) = \hat{f}_i(\hat{x}_\alpha, \widetilde{x}_\alpha, \hat{y}_j, \widetilde{y}_j) + i\,\widetilde{f}^i(\hat{x}_\alpha, \widetilde{x}_\alpha, \hat{y}_j, \widetilde{y}_j)$$

où $\hat{x}_\alpha, \widetilde{x}_\alpha, \hat{y}_j, \widetilde{y}_j, \hat{f}^i, \widetilde{f}^i$ sont réelles.

L'ensemble L (cf. 2,3) passera en l'ensemble L_1 suivant

$$\left.\begin{aligned} &\sum_\alpha [(\hat{x}_\alpha - \hat{a}_\alpha)^2 + (\widetilde{x}_\alpha - \widetilde{a}_\alpha)^2] < r^2 \\ &\sum_i [(\hat{y}_j - \hat{b}_j)^2 + (\widetilde{y}_j - \widetilde{b}_j)^2] < R^2 \end{aligned}\right\} \quad (\textit{ensemble } L_1).$$

On aura en vertu de (2,4)

$$\hat{f}^i(\hat{a}_\alpha, \widetilde{a}_\alpha, \hat{b}_j, \widetilde{b}_j) = 0, \quad \widetilde{f}^i(\hat{a}_\alpha, \widetilde{a}, \hat{b}_j, \widetilde{b}) = 0.$$

Envisageons la suite associée de la suite (2,1)

$$\hat{f}^1(\hat{x}_\alpha, \widetilde{x}_\alpha; \hat{y}_j, \widetilde{y}_j), \widetilde{f}^1(\ldots), \ldots, \hat{f}^n(\ ), \widetilde{f}^n(\ ).$$

Ces fonctions possèdent les dérivées partielles du premier ordre continues dans L_1. Les allongements extrémaux de cette suite relatifs respectivement aux variables $\hat{x}_1, \widetilde{x}_1, \ldots, \hat{x}_p, \widetilde{x}_p$ et

$\hat{y}_1, \tilde{y}_1, \ldots, \hat{y}_n, \tilde{y}_n$ seront les mêmes que les allongements correspondants de la suite (2,1) (cf. § 1, XVII). On aura donc dans L_1

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{all}}_{\hat{x},\tilde{x}}(\hat{f}, \tilde{f}; \hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha, \hat{y}_j, \tilde{y}_j) \leqslant \Omega, \\ &\underline{\mathrm{all}}_{\hat{y},\tilde{y}}(\hat{f}, \tilde{f}; \hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha, \hat{y}_j, \tilde{y}_j) \geqslant \omega > 0. \end{aligned} \tag{2,52}$$

Or notre théorème étant juste dans le cas des variables réelles, pour le système d'équations

$$\hat{f}^i(\hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha, \hat{y}_j, \tilde{y}_j) = 0; \; \tilde{f}^i(\hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha, \hat{y}_j, \tilde{y}_j) = 0,$$

il existe une suite de fonctions

$$\hat{\varphi}^i(\hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha), \; \tilde{\varphi}^i(\hat{x}_\alpha, \tilde{x}) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2,53}$$

qui sont continues dans la sphère

$$\sum [(\hat{x}_\beta - \hat{a}_\beta)^2 + (\tilde{x}_\beta - \tilde{a}_\beta)^2] < \varrho^2 \tag{2,54}$$

(où ϱ a la valeur 2,10) et y remplissent identiquement les équations

$$\hat{f}^i(\hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha, \hat{\varphi}^j, \tilde{\varphi}^j) \equiv 0, \; \tilde{f}^i(\hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha, \hat{\varphi}^j, \tilde{\varphi}^j) \equiv 0, \tag{2,55}$$

$$\hat{\varphi}^j(\hat{a}_\alpha, \tilde{a}_\alpha) = 0, \; \tilde{\varphi}^j(\hat{a}_\alpha, \tilde{a}_\alpha) = 0. \tag{2,56}$$

Il existe un système unique de telles fonctions $\hat{\varphi}^j$ et $\tilde{\varphi}^j$.

Il est évident que les fonctions complexes

$$\varphi^j(x_\alpha) = \varphi^j(\hat{x}_\alpha + i\tilde{x}_\alpha) = \hat{\varphi}^j(\hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha) + i\tilde{\varphi}^j(\hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha) \tag{2,57}$$

constituent le système unique des fonctions continues dans la sphère (2,9) qui y satisfont aux conditions (2,11) et (2,12).

Nous démontrerons que les fonctions φ^j possèdent les dérivées partielles continues du premier ordre relativement aux variables complexes $\{x_\alpha\}$. Il suffit de prouver, à cet effet, les relations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \hat{\varphi}^j}{\partial \hat{x}_\alpha} = \frac{\partial \tilde{\varphi}^j}{\partial \tilde{x}_\alpha}, \quad \frac{\partial \hat{\varphi}^j}{\partial \tilde{x}_\alpha} = -\frac{\partial \tilde{\varphi}^j}{\partial \hat{x}_\alpha}. \tag{2,58}$$

On a, en vertu de (2,55), les identités

$$\hat f^i_{\hat x_\beta}(\hat x_\alpha, \tilde x_\alpha, \hat\varphi^j, \tilde\varphi^j) + \sum_j \hat f^i_{\hat y_j}\hat\varphi^j_{\hat x_\beta} + \sum_j \hat f^i_{\tilde y_j}\tilde\varphi^j_{\hat x_\beta} \equiv 0,$$

(2,59)
$$\tilde f^i_{\tilde x_\beta} + \sum_j \tilde f^i_{\tilde y_j}\tilde\varphi^j_{\tilde x_\beta} + \sum_j \tilde f^i_{\hat y_j}\hat\varphi^j_{\tilde x_\beta} \equiv 0,$$
$$\hat f^i_{\tilde x_\beta} + \sum_j \hat f^i_{\hat y_j}\hat\varphi^j_{\tilde x_\beta} + \sum_j \hat f^i_{\tilde y_j}\tilde\varphi^j_{\tilde x_\beta} \equiv 0,$$
$$\tilde f^i_{\hat x_\beta} + \sum_j \tilde f^i_{\tilde y_j}\tilde\varphi^j_{\hat x_\beta} + \sum_j \tilde f^i_{\hat y_j}\hat\varphi^j_{\hat x_\beta} \equiv 0.$$

En s'appuyant sur la proposition X du § 1, page 99 on déduit de (2,52) l'inégalite

(2,60)
$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \hat f^i_{\hat y_j}, & \hat f^i_{\tilde y_j} \\ \tilde f^i_{\hat y_j}, & \tilde f^i_{\tilde y_j} \end{pmatrix} \neq 0$$ [21]).

Or les fonctions complexes $f^i(x_\alpha, y_j)$ étant analytiques (parce qu'elles possèdent les dérivées partielles continues du premier ordre) les fonctions $\hat f^i$ et $\tilde f^i$ vérifient les conditions de Cauchy-Riemann

$$\hat f^i_{\hat x_\alpha} = \tilde f^i_{\tilde x_\alpha}, \quad \hat f^i_{\tilde x_\alpha} = -\tilde f^i_{\hat x_\alpha}, \quad \hat f^i_{\hat y_j} = \tilde f^i_{\tilde y_j}, \quad \hat f^i_{\tilde y_j} = -\tilde f^i_{\hat y_j}.$$

En retranchant les deux premières identites (2,59) l'une de l'autre et en ajoutant les deux dernières on obtient, par conséquent, les identités

$$\sum_j \hat f^i_{\hat y_j}(\hat\varphi^j_{\hat x_\beta} - \tilde\varphi^j_{\tilde x_\beta}) + \sum_j \hat f^i_{\tilde y_j}(\tilde\varphi^j_{\hat x_\beta} + \hat\varphi^j_{\tilde x_\beta}) = 0,$$
$$\sum_j \tilde f^i_{\hat y_j}(\hat\varphi^j_{\hat x_\beta} - \tilde\varphi^j_{\tilde x_\beta}) + \sum_j \tilde f^i_{\hat y_j}(\tilde\varphi^j_{\hat x_\beta} + \hat\varphi^j_{\tilde x_\beta}) = 0,$$

pour $i = 1, \ldots, n$. En raison de (2,60) on en déduit les relations (2,58). Les fonctions $\varphi^j(x_\alpha)$ (cf. 2,57) possèdent donc les dérivées partielles continues du premier ordre relativement aux variables complexes $\{x_\alpha\}$. Elles sont, par suite, analytiques.

[21]) Ce déterminant contient $2n$ lignes et $2n$ colonnes.

La démonstration de la première partie de notre théorème étant ainsi établie, il reste à établir les inégalités (2,13), (2,13 a) et (2,14), ce qui pourra être effectué par textuellement le même raisonnement que celui qui a été developpé dans l'alinéa X du présent paragraphe (cf. p. 110).

Théorème 2. Gardons toutes les prémisses du Théorème 1 (p. 101) à l'exception des inégalités (2,5) et (2,6). Supposons, en revange, que, pour certains nombres fixes, β, γ et δ subsistent, dans l'ensemble (2,3), les inégalités

$$|\operatorname{Det} f^i_{y_j}| \geqslant \beta > 0,$$

(2,61)
$$\sum_i \sum_j |f^i_{y_j}|^2 \leqslant \gamma \text{ }^{22)}, \quad \sum_i \sum_\alpha |f^i_{x_\alpha}|^2 \leqslant \delta.$$

Posons

(2,62)
$$\omega = \frac{\beta}{(\sqrt{\gamma})^{n-1}}, \quad \Omega = \sqrt{\delta}.$$

Nous affirmons que les inégalités (2,5) et (2,6) aurons lieu dans l'ensemble (2,3) pour ces valeurs de ω et Ω et que, par suite, la thèse du théorème 1 sera juste pour les valeurs de ω et Ω définies par (2,62) [23]).

La démonstration est immédiate en vertu de la proposition XII du § 1, page 90.

§ 3. Évaluation du domaine d'existence des transformations inverses réelles ou complexes.

Théorème 3. Considérons la transformation

(3.1)
$$x_i = g^i(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

et supposons que les fonctions réelles ou complexes g^i des variables respectivement réelles ou complexes $y_1, \dots, y_n$ possèdent

---

[22]) On a $\gamma > 0$, car, dans le cas contraire, on aurait $f^i_{y_j} = 0$ et l'inégalité (2.61) prendrait la forme $0 \geqslant \beta > 0$.

[23]) C.-à.-d. $\overline{\mathrm{all}}_x(f; x_\alpha, y_j) \leqslant \Omega$, $\underline{\mathrm{all}}_y(f, x_\alpha, y_j) \geqslant \omega > 0$.

les dérivées partielles du premier ordre $g^i_{y_j}$ continues dans la sphère

(3,2) $$\sqrt{\sum_i |y_i - b_i|^2} < R \leqslant +\infty$$

et que $$a_i = g^i(b_1, \dots, b_n).$$

Supposons ensuite qu'il existe un nombre fixe $\omega > 0$, tel que, en tout point de la sphère (3,2), on ait

(3,3) $$\underline{\text{all}}_y(g;\, y_1, \dots, y_n) > \omega > 0$$ [24]).

Ceci étant admis il existe une suite de fonctions

$$\varphi^j(x_1, \dots, x_n) \quad (j = 1, \dots, n)$$

qui sont continues dans la sphère

(3,4) $$\sum_{\beta/1}^{n} |x_\beta - a_\beta|^2 < \omega R$$ [25])

et y remplissent identiquement les équations

(3,5) $$g^i(\varphi^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi^n(x_1, \dots, x_n)) = x_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

et pour lesquelles on a

$$b_j = \varphi^j(a_1, \dots, a_n).$$

Il existe un système unique de telles fonctions φ^j. Elles possèdent dans (3,4) les dérivées partielles du premier ordre continues et on a dans (3,4) les inégalités

$$\overline{\text{all}}_x(\varphi;\, x_1, \dots, x_n) \leqslant \frac{1}{\omega},$$

$$\sqrt{\sum_j |\varphi^j_{x_\alpha}|^2} \leqslant \frac{1}{\omega}, \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

---

[24]) Cf. la définition des allogements § 1, VII et § 1, XIX. Si, dans la sphère (3.2) on a $|\,\text{Det}\, g^i_{y_j}| \geqslant \beta > 0$, $\sqrt{\sum_i \sum_j |g^i_{y_j}|^2} \leqslant \gamma$ alors l'inégalité (3.3) a lieu dans cette sphère lorsque l'on pose $\omega = \frac{\beta}{\gamma^{n-1}}$, (cf. la proposition XII du § 1, page 90).

[25]) $\omega R = +\infty$ lorsque $R = +\infty$.

et pour deux points quelconques de (3,4) on a

$$\sqrt{\sum_j |\varphi^j(\bar{\bar{x}}_1, \dots, \bar{\bar{x}}_n) - \varphi^j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)|^2} \leqslant \frac{1}{\omega} \sqrt{\sum_\alpha |\bar{\bar{x}}_\alpha - \bar{x}_\alpha|^2}.$$

Démonstration. Posons

$$f^i(x_\alpha, y_j) = g^i(y_j) - x_i.$$

Les fonctions f^i possèdent des dérivées partielles continues du premier ordre dans l'ensemble

$$\sum_\alpha |x_\alpha - a_\alpha|^2 < r = +\infty, \; \sum_i |y_i - b_i|^2 < R^2.$$

On a

$$\overline{\mathrm{all}}_x(f; x_\alpha, y_j) = 1, \; \underline{\mathrm{all}}_y(f; x_\alpha, y_j) = \underline{\mathrm{all}}_y(g; y_j) \geqslant \omega > 0.$$

En posant, dans le théorème 1, $\Omega = 1$ nous en déduirons immédiatement le présent théorème.

§ 4. Évaluation du domaine dans lequel une transformation est univalente.

Définition d'une transformation univalente. Nous dirons qu'une transformation

$$x_i = g^i(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

est univalente dans un ensemble Z lorsqu'elle fait correspondre à deux points différents $\{y_j\}$ de Z toujours deux points différents $\{x_\alpha\}$.

Remarque 1. Dans les hypothèses du théorème 3 la transformation (3,1) est univalente dans un voisinage sphérique suffisamment petit du point $\{b_i\}$, car le jacobien $\mathrm{Det}(g^i_{y_j})$ est non nul (cf. proposition X du § 1). Le théorème 3 ne donne cependant aucune évaluation de la grandeur de ce voisinage. Des hypothèses accessoires sont nécessaires à cet effet.

Remarque 2. Désignons par E_n l'espace à n dimensions tout entier. Nous affirmons que, dans les hypothèses du Théorème 3 et au cas $R = +\infty$, la transformation (3,1) est univalente dans E_n. En vertu du théorème 3 la transformation

inverse $y_j = \varphi^j(x_\alpha)$ est définie dans E_n. Désignons par G l'image de E_n par l'intermédiaire de cette transformation. Il suffit de prouver que $G = E_n$. Dans le cas contraire on pourrait indiquer un point (fini) $\{\overset{\circ}{y}_i\}$ appartenant à la frontière de G et une suite $\{\overset{\nu}{y}{}^i\}$ de points appartenant à G et tendant vers $\{\overset{\circ}{y}_i\}$. Pour un point convenable $\{\overset{\nu}{x}_\alpha\}$ on a $\overset{\nu}{y}_j = \varphi^j(\overset{\nu}{x}_\alpha)$. On a évidemment $\sum |\overset{\nu}{x}_\alpha|^2 \to +\infty$. Mais $\overset{\nu}{x}_\alpha = g^\alpha(\overset{\nu}{y}_j)$ et

$$\left\{\sum_\alpha |\overset{\nu}{x}_\alpha|^2\right\} = \sum_\alpha |g^\alpha(\overset{\nu}{y}_j)|^2 \to \sum_\alpha |g^\alpha(\overset{\circ}{y}_j)|^2 < +\infty,$$

ce que constitue une contradiction. Un résultat analogue est du à M. HADAMARD (Bull. Soc. Math. de France, XXXIV, p. 71).

Théorème 4. Supposons que les fonctions g^i (réelles ou complexes) intervenant dans la transformation

$$(4,1) \qquad x_i = g^i(y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

possèdent les dérivées partielles du premier ordre $g^i_{y_\beta}$ continues dans la sphère (réelle ou complexe)

$$(4,2) \qquad \sqrt{\sum |y_i - b_i|^2} < R \leqslant +\infty.$$

Supposons ensuite que

$$(4,3) \qquad \underline{\text{all}}_y(g; y_\alpha) \geqslant \omega > 0,$$

$$(4,4) \qquad \overline{\text{all}}_y(g; y_\alpha) \leqslant \eta < +\infty \text{ [26]}$$

Ceci étant admis la transformation (4,1) est *univalente* dans la sphère

$$(4,5) \qquad \sqrt{\sum |y_i - b_i|^2} < \frac{\omega}{\eta} R \text{ [27]}.$$

---

[26]) Cf. la définition des allongements § 1, VII et § 1, XIX. Si, dans la sphère (4.2), on a $|\text{Det}\, g^i_{y_j}| \geqslant \beta > 0$, $\sqrt{\sum_i \sum_j |g^i_{y_j}|^2} \leqslant \gamma$ alors les inégalités (4.3) et (4,4) seront vérifiées lorsque l'on posera $\omega = \frac{\beta}{\gamma^{n-1}}$, $\eta = \gamma$ (cf. page 90).

[27]) On a évidemment $\eta \geqslant \omega > 0$.

Si l'on envisage la transformation (4,1) dans cette sphère alors sa transformation inverse

(4,6) $$y_i = \psi^i(x_\alpha) \quad (i = 1, \dots, n)$$

est définie dans un ensemble lequel contient la sphère

(4,7) $$\sqrt{\sum |x_i - a_i|^2} < \frac{\omega^2}{\eta} R.$$

Les fonctions ψ^i possèdent dans (4,7) les dérivées partielles du premier ordre continues et on a

(4,8) $$0 < \frac{1}{\eta} \leqslant \underline{\mathrm{all}}_x(\psi; x_\alpha), \ \overline{\mathrm{all}}_x(\psi; x_\alpha) \leqslant \frac{1}{\omega}.$$

Démonstration. Considérons les fonctions $\varphi^i(x_\alpha)$ intervenant dans l'énoncé du Théorème 3. Ces fonctions remplissent dans la sphère (3,4) les identités (3,5).

On a donc

$$\sum_j g^i_{y_j}(y_\varkappa)\varphi^j_{x_l}(x_\alpha) = \delta_{il}$$

lorsque $y^i = \varphi^i(x_\alpha)$. En appliquant la proposition XVI du § 1 à (4,3) et (4,4), on obtient les inégalités

$$\underline{\mathrm{all}}_x(\varphi; x_\alpha) \geqslant \frac{1}{\eta} > 0,$$

$$\overline{\mathrm{all}}_x(\varphi; x_\alpha) \leqslant \frac{1}{\omega}$$

en tout point de la sphère (3,4).

Appliquons maintenant le Théorème 3 à la transformation

$$y_i = \varphi^i(x_\alpha) \quad (i = 1, \dots, n)$$

envisagée dans la sphère (3,4). On constatera ainsi qu'il existe une suite des fonctions

$$h^i(y_j) \quad (i = 1, \dots, n)$$

possèdant des dérivées partielles du premier ordre continues dans la sphère (4,5) et telles que, dans cette sphère, on ait

(4,9) $$\varphi^i(h^\varkappa(y_j)) \equiv y_i.$$

On aura donc, en raison de (4,9) et (3,5) les identités

$$g^j(y_i) \equiv g^j(\varphi^p(h^\varkappa(y_i))) \equiv h^j(y_i) \tag{4,10}$$

valables dans la sphère (4,5).

Nous affirmons que la transformation (4,1) est univalente dans la sphère (4,5). Soient, en effet, $\{\overline{y}_i\}$ et $\{\overline{\overline{y}}_i\}$ deux points différents de cette sphère

$$\sum |\overline{y}_i - \overline{\overline{y}}_i|^2 > 0 . \tag{4,11}$$

Il suffit de prouver que

$$\sum |g^i(\overline{y}_j) - g^i(\overline{\overline{y}}_j)|^2 > 0 . \tag{4,12}$$

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi c.-à.-d. que

$$g^\varkappa(\overline{y}_j) = g^\varkappa(\overline{\overline{y}}_j) \quad (\varkappa = 1, \ldots, n).$$

En vertu de (4,10) on aura

$$h^\varkappa(\overline{y}_j) = h^\varkappa(\overline{\overline{y}}_j) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

donc, en raison de (4,9),

$$\overline{y}_i = \varphi^i(h^\varkappa(\overline{y}_j)) = \varphi_i(h^\varkappa(\overline{\overline{y}}_j)) = \overline{\overline{y}}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

contrairement à (4,11). L'univalence de la transformation (4,1) dans la sphère (4,5) se trouve ainsi établie.

En appliquant le théorème 3 à la transformation (4,1) envisagée *exclusivement* dans la sphère (4,5) on voit qu'il existe une suite de fonctions $\psi^i(x_\alpha)$ définies dans la sphère (4,7) qui y remplissent les identités

$$x^i = g^i(\psi^j(x_\alpha))$$

et les relations (4,8). La transformation (4,6) ainsi définie constitue évidemment la transformation inverse (envisagée dans (4,7)) de la transformation (4,1) (envisagée, à son tour, exclusivement dans la sphère (4,5)).

§ 5. Appliqnation aux équations perturbées.

Remarque 3. Considérons le système d'équations

$$(5,1) \qquad F^i(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_n)+\varepsilon^i(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_n)=0, \quad (i=1,\dots,n)$$

les fonctions F^i, ε^i et les variables $\{x_\alpha\}$ et $\{y_j\}$ étant réelles ou complexes. Nous supposons que F^i et ε^i possèdent, dans l'ensemble (2,3), les dérivées partielles continues du premier ordre. Nous supposons que le point

$$(5,2) \qquad x_\alpha=a_\alpha,\ y_j=b_j \quad (\alpha=1,\dots,p;\ j=1,\dots,n)$$

remplisse le système (5,1). Relativement aux suites $F^1,\dots,F^n$ et $\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n$ nous supposons qu'elles satisfaisent, dans l'ensemble (2,3), aux conditions

$$\underline{\mathrm{all}}_y(F;x_\alpha,y_j)\geqslant\omega_1>0,$$
$$\overline{\mathrm{all}}_y(\varepsilon;x_\alpha,y_j)\leqslant\zeta_1<\omega_1,$$
$$\overline{\mathrm{all}}_x(F;x_\alpha,y_j)\leqslant\Omega_1,$$
$$\overline{\mathrm{all}}_x(\varepsilon;x_\alpha,y_j)\leqslant\eta_1 \text{ [28]}.$$

En posant

$$f^i=F^i+\varepsilon^i,\ \Omega=\Omega_1+\eta_1,\ \omega=\omega_1-\zeta_1>0$$

nous aurons en s'appuyant sur les propositions XV du § 1 (page 92) les inégalités

$$\underline{\mathrm{all}}_y(f;x_\alpha,y_j)\geqslant\omega>0,\ \overline{\mathrm{all}}_x(f;x_\alpha,y_j)\leqslant\Omega$$

et nous pourrons appliquer le Théorème 1 pour évaluer la grandeur du domaine d'existence des fonctions implicites $y_i=\varphi^i(x_\alpha)$ déterminées par le système (5,1) et les conditions initiales $b_i=\varphi^i(a_\alpha)$ (cf. 5,2).

Remarque 4. Dans le cas du système

$$G^i(x_1,\dots,y_n)\equiv y^i$$

---

[28]) Afin de trouver $\omega_1,\zeta_1,\Omega_1,\eta_1$, on peut appliquer la proposition XII du § 1.

le système (5,1) prendra la forme

$$y_i + \varepsilon_i(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

On a dans ce cas

$$\overline{\text{all}}_x(F; x_\alpha, y_j) = 0, \quad \overline{\text{all}}_y(F; x_\alpha, y_j) = 1.$$

Si en plus

$$\overline{\text{all}}_x(G; x_\alpha, y_j) \leqslant \eta_1, \quad \overline{\text{all}}_y(G; x_\alpha, y_j) \leqslant \zeta_1 < 1$$ [29])

on pourra appliquer le Théorème 1 en posant $\omega = 1 - \zeta_1$, $\Omega = \eta_1$ (cf. la remarque précédente).

Remarque 5. Une observation analogue aux Remarques 4 et 5 s'applique au cas des transformations perturbées de la forme

$$x_i = g^i(y_1, \dots, y_n) + \varepsilon^i(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

en ce qui concerne l'évaluation du domaine d'existence de la transformation inverse.

---

[29]) On a évidemment $\overline{\text{all}}_y(-(G; x_\alpha, y_j)) = \overline{\text{all}}_y(G; x_\alpha, y_j)$.

SUR UNE MÉTHODE D'APPROXIMATION DES FONCTIONS

Par J. SZARSKI (Kraków)

Comme on le sait, une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ continue dans un domaine fermé et borné se laisse approcher, de maintes façons, par une suite de polynômes. Si la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ jouit, en plus, de quelques propriétés spéciales, il est parfois désirable que les fonctions qui l'approchent en jouissent aussi. Il est difficile, en général, de mettre en évidence les propriétés correspondantes des polynômes d'approximation. Le but de la note présente est de montrer que le problème en question se laisse résoudre par une autre méthode d'approximation.

Supposons que la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ soit continue dans un ensemble ouvert Ω. Soit ω_1 un ensemble ouvert et borné tel que: $\overline{\omega}_1 \subset \Omega$[1]). Prenons N naturel suffisamment grand pour que chaque cube:

$$(K_\nu(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n)) \qquad |x_i - \mathring{x}_i| \leqslant \frac{1}{\nu} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \nu \geqslant N)$$

où $Q(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n)$ est un point quelconque de l'ensemble ω_1, soit contenu dans Ω. Nous définissons, dans l'ensemble ω_1, des fonctions $F_\nu(x_1, \ldots, x_n)$ par les formules suivantes:

---

[1]) Si A est un ensemble quelconque, alors $\overline{A}$ désigne la somme de cet ensemble et de sa frontière.

Si A et B sont deux ensembles, alors $A \subset B$ signifie que A fait partie de B.

$$F_\nu(x_1,\dots,x_n) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\int\limits_{x_1-\frac{1}{\nu}}^{x_1+\frac{1}{\nu}} \dots\dots \int\limits_{x_n-\frac{1}{\nu}}^{x_n+\frac{1}{\nu}} f(\xi_1,\dots,\xi_n)\, d_{\xi_1}\dots d_{\xi_n}}{2^n\left(\frac{1}{\nu}\right)^n} \qquad (\nu = N,\ N+1,\dots)$$

($2^n\left(\frac{1}{\nu}\right)^n$ est le volume du cube K_ν).

Théorème 1. Les fonctions F_ν sont de classe C^1 dans l'ensemble ω_1 et y tendent uniformément vers la fonction $f(x_1,\dots,x_n)$.

Démonstration: On a évidemment:

$$\frac{\partial F^\nu}{\partial x_i} = \frac{\int\limits_{x_1-\frac{1}{\nu}}^{x_1+\frac{1}{\nu}} d_{\xi_1}\dots \int\limits_{x_{i-1}-\frac{1}{\nu}}^{x_{i-1}+\frac{1}{\nu}} d_{\xi_{i-1}} \int\limits_{x_{i+1}-\frac{1}{\nu}}^{x_{i-1}+\frac{1}{\nu}} d_{\xi_{i+1}} \dots \int\limits_{x_n-\frac{1}{\nu}}^{x_n+\frac{1}{\nu}} \left[f(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},x_i+\frac{1}{\nu},\xi_{i+1},\dots,\xi_n) - f(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},x_i-\frac{1}{\nu},\xi_{i-1},\dots,\xi_n)\right] d\xi_n}{2^n\left(\frac{1}{\nu}\right)^n}$$

d'où il résulte immédiatement que les fonctions F_ν sont de classe C^1. Pour démontrer la seconde partie de notre théorème désignons par ω_2 un ensemble ouvert et borné tel que: $\overline{\omega}_2 \subset \Omega$ et que chaque cube K_ν envisagé plus haut soit contenu dans ω_2 [2]). En appliquant à l'intégrale figurant dans la formule (1), le théorème de la moyenne nous obtenons:

(3) $$F_\nu(x_1,\dots,x_n) = f(\check{\xi}_1,\dots,\check{\xi}_n) \qquad (\nu = N, N+1,\dots)$$

où $\check{\xi}_1,\dots,\check{\xi}_n$ sont des nombres convenablement choisis remplissant les inégalités:

(4) $$|x_i - \check{\xi}_i| \leqslant \frac{1}{\nu} \qquad (i = 1, 2,\dots, n).$$

La fonction $f(x_1,\dots,x_n)$ étant uniformément continue dans l'ensemble $\overline{\omega}_2$ il résulte de (3) et (4) que, pour $\varepsilon > 0$ donné d'avance, l'inégalité:

(5) $$|f(x_1,\dots,x_n) - F_\nu(x_1,\dots,x_n)| = |f(x_1,\dots,x_n) - f(\check{\xi}_1,\dots,\check{\xi}_n)| < \varepsilon,$$

[2]) L'ensemble ω_2 existe évidemment, pourvu que N soit suffisamment grand.

est remplie en tout point $(x_1, \dots, x_n)$ appartenant à l'ensemble ω_1 [3]), pourvu que ν soit suffisamment grand. Ceci termine la démonstration.

Théorème 2. Si la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ est croissante (décroissante), au sens large, par rapport a x_i, alors les fonctions F_ν le sont aussi. Cela découle immédiatement de la formule (1).

Théorème 3. Si la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ est de classe C^{k-1} dans Ω, alors les fonctions F_ν sont de classe C^k dans ω_1 et leurs dérivées d'ordre: $1, 2, \dots, k-1$, tendent uniformément dans ω_1 vers les dérivées respectives de la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$.

Démonstration: Il découle immédiatement de la formule (1) que, dans nos hypothèses, les fonctions F_ν sont de classe C^k.

Soient $l, s, \alpha_1, \dots, \alpha_s$, des nombres naturels, fixés tels que: $l \leqslant k$, $s \leqslant n$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = l$. En employant le théorème de la moyenne et celui des accroissements finis nous obtenons de la formule (1), la relation:

$$(6)\qquad \frac{\partial^l F_\nu}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} =$$

$$= \frac{f x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot x_2^{\alpha_2} \dots x_s^{\alpha_s}\left(x_1 + \frac{1}{\nu}, \check{\xi}_2, \dots, \check{\xi}_n\right) - f x_1{}^{1-1} \cdot x_2^{\alpha_2} \dots x_s^{\alpha_s}\left(x_1 - \frac{1}{\nu}, \xi_2, \dots, \check{\xi}_n\right)}{2 \cdot \frac{1}{\nu}}\ {}^{4)}$$

où $\hat{\xi}_2, \dots, \hat{\xi}_n$ sont des nombres convenablement choisis, remplissant les inégalités (4).

Supposons maintenant que: $l \leqslant k-1$. En désignant par $\hat{\xi}_1$ un nombre convenablement choisis, remplissant la première inégalité (4) et en appliquant le théoreme des accroissements finis nous déduisons de la formule (6) la relation:

$$(7)\qquad \frac{\partial^l F_\nu}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} = f x_1^{\alpha_1} \dots x_s^{\alpha_s}(\check{\xi}_1, \dots, \check{\xi}_n).$$

---

[3]) L'ensemble ω_1 étant évidemment contenu dans $\bar{\omega}_2$.

[4]) Nous désignons par $f x_1^{\alpha_1} \dots x_s^{\alpha_s}$ la dérivée $\dfrac{\partial^l f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}}$.

La fonction $fx_1^{\alpha_1}\dots x_s^{\alpha_s}$ étant uniformément continue dans $\overline{\omega}_2$, il s'ensuit (comme dans la démonstration du théorème 1) que, pour $\varepsilon > 0$ donné d'avance, on a:

$$(8) \qquad \left| \frac{\partial^l F_\nu}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots \partial x_s^{\alpha_s}} - \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots \partial x_s^{\alpha_s}} \right| < \varepsilon$$

en tout point de l'ensemble ω_1, pourvu que ν soit suffisamment grand, ce qui termine la démonstration.

Thorrème 4. Gardons les hypothèses du théorème 3., et supposons, en plus, que les dérivées d'ordre $k-1$ de la fonction $f(x_1,\dots,x_n)$ possèdent les différentielles totales en un point $P(x_1,\dots,x_n)$ appartenant à l'ensemble ω_1. Ceci étant supposé, les dérivées d'ordre k des fonctions F_ν, prises au point P, tendent vers les dérivées respectives de la fonction $f(x_1,\dots,x_n)$.

Démonstration: En posant $l=k$ dans la formule (6), nous en déduisons, en vertu de notre hypothèse sur l'existence des différentielles totales, la relation:

$$(9) \qquad \frac{\partial^k F_\nu(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots \partial x_s^{\alpha_s}} = \frac{\partial^k f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1},\dots,\partial x_s^{\alpha_s}} +$$

$$+\left[\varepsilon\left(x_1+\frac{1}{\nu},\check{\xi}_2,\dots,\check{\xi}_n\right)-\varepsilon\left(x_1-\frac{1}{\nu},\check{\xi}_2,\dots,\check{\xi}_n\right)\right]\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\sum_{j=2}^{n}(x_j-\check{\xi}_j)^2}}{2\cdot\frac{1}{\nu}}$$

où $\varepsilon(\xi_1,\dots,\xi_n)$ désigne une fonction satisfaisant à l'implieation:

$$(10) \qquad (\xi_1,\dots,\xi_n)\to(x_1,\dots,x_n)\cdot\supset\cdot\varepsilon(\xi_1,\dots,\xi_n)\to 0\,.$$

En vertu des relations (4) et (10) et l'expression

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\sum_{j=2}^{n}(x_j-\check{\xi}_s)^2}}{2\cdot\frac{1}{\nu}}$$

étant évidemment bornée, il résulte de ia formule (9), que:

$$(11) \qquad \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\partial^k F_\nu(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_s^{\alpha_s}} = \frac{\partial^k f((x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_s^{\alpha_s}}$$

ce qui termine la démonstration.

Théorème 5. Gardons les hypothèses du théorème 3., et supposons que les dérivées d'ordre $k-1$ de la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ remplissent la condition de LIPSCHITZ avec la constante M.

Ceci étant supposé on a les inégalités:

$$(12) \qquad \left| \frac{\partial^k F_\nu}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} \right| \leqslant M.$$

Les inégalités (12) découlent immédiatement de la formule (6), si l'on y pose $l=k$ [5]).

Remarque: En itérant le procès à l'aide duquel nos avons déduit les fonctions F_ν de la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ on peut construire des fonctions approchant $f(x_1, \dots, x_n)$ et de classe si haute qu'on le veut.

---

[5]) Ce théorème peut être appliqué pour simplifier les calculs dans le travail de M. T. Ważewski: *Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.* Math. Zeitschrift, Band 43, Heft 4.

SUR UN SYSTÈME D'INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES

Par J. Szarski (Kraków)

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires:

$$\dot{y}^i = f^i(x, y^1, \dots, y^n) \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{1}$$

Supposons que les fonctions soient continues dans un ensemble ouvert Ω et qu'elles satisfassent à la suivante hypothèse H:

Si, pour un i quelconque $(i = 1, \dots, n)$, les points:

$$\begin{aligned} &\overline{P}(x, \overline{y}^1, \dots, \overline{y}^{i-1}, y^i, \overline{y}^{i+1}, \dots, y^n); \\ &\widetilde{P}(x, \widetilde{y}^1, \dots, \widetilde{y}^{i-1}, y^i, \widetilde{y}^{i+1}, \dots, \widetilde{y}^n) \end{aligned} \tag{2}$$

appartiennent à l'ensemble Ω et:

$$\overline{y}^\nu \leqslant \widetilde{y}^\nu \qquad (\nu = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n) \tag{3}$$

alors:

$$f^i(x, \overline{y}^1, \dots, \overline{y}^{j-1}, y^i, \overline{y}^{i+1}, \dots, \overline{y}^n) \leqslant f(x, \widetilde{y}^1, \dots, \widetilde{y}^{i-1}, y^i, \widetilde{y}^{i+1}, \dots, \widetilde{y}^n). \tag{4}$$

Soit:

$$y^i = \psi^i(x) \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{5}$$

l'intégrale supérieure à droite[1]) du système (1) issue du point

---

[1]) Pour la définition et l'existence de cette intégrale cf. E. Kamke: *Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen.* Acta Math. T. 58., p. 78, Satz 7. Ce théorème ainsi que d'autres théorèmes de M. Kamke que je citerai dans la suite nécessite, pour être tout à fait strict, une modification d'hypothèse indiquée par M. Ważewski dans son travail: *Systèmes d'équations et d'inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications.* A paraître dans les Annales de la Société Polonaise de Mathématique.

$\mathring{P}(\mathring{x}, \mathring{y}^1, \ldots, \mathring{y}^n)$ appartenant à Ω et supposons qu'elle soit définie dans l'intervalle:

$$\mathring{x} \leqslant x < \mathring{x} + a. \tag{6}$$

Supposons ensuite que les fonctions $\varphi^i(x)$, $(i = 1, \ldots, n)$, soient absolument continues, généralisées dans l'intervalle (6) [2]) et qu'elles remplissent les inégalités suivantes:

$$\varphi^i(\mathring{x}) \leqslant \psi^i(\mathring{x}) = \mathring{y}^i \tag{7}$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

$$\dot{\varphi}^i_a(x) \leqslant f^i(x, \varphi^1(x), \ldots, \varphi^n(x)) \tag{8}$$

$\dot{\varphi}^i_a$ désignant la dérivée approximative de φ^i et les inégalités (8) subsistant, par hypothèse, presque partout dans l'intervalle (6).

Théorème [3]). Ceci étant supposé on a dans l'intervalle (6), les inégalités suivantes:

$$\varphi^i(x) \leqslant \psi^i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Nous allons démontrer notre théorème d'abord dans un voisinage suffisamment petit du point initial sous l'hypothèse additionnelle que les fonctions f^i soient de classe C^1 et nous l'étendrons ensuite au cas des fonctions continues. Ces deux propositions font objet des trois lemmes qui suivent. Notre théorème en résultera immédiatement.

---

[2]) Une fonction $f(x)$ est appelée absolument continue généralisée dans l'intervalle (a, b), si: 1° elle est continue dans (a, b), et 2° l'intervalle (a, b) est une somme dénombrable d'ensembles sur chacun desquels $f(x)$ est absolument continue. Une telle fonction possède presque partout des dérivées approximatives.

[3]) La différence entre ce théorème et celui de M. Ważewski, cf. loc. cit. [1]), consiste en ce que M. Ważewski suppose que les fonctions φ^i possèdent, partout dans l'intervalle, des nombres dérivés remplissant les inégalités différentielles, tandis que chez nous les dérivées approximatives de φ^i sont supposées de satisfaire aux inégalités (8) *presque partout* dans l'intervalle (6).

Remarques préliminaires:

I. Supposons que les fonctions f^i soient de classe C^1 dans Ω et qu'elles satisfassent à l'hypothèse H.

Désignons par:

$$y^i = \hat{y}^i(x, \xi, \eta^1, \ldots, \eta^n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

la caractéristique du système (1) passant par le point $(\xi, \eta^1, \ldots, \eta^n)$. Comme on le sait[4]), les fonctions $\hat{y}^i(x, \xi, \eta^1, \ldots, \eta^n)$ sont de classe C^1 partout où elles sont définies et remplissent l'identité:

$$\frac{\partial \hat{y}^i(x, \xi, \eta^1, \ldots, \eta^n)}{\partial \xi} + \sum_{j=1}^{n} f^j(\xi, \eta^1, \ldots, \eta_n) \cdot \frac{\partial \hat{y}^i(x, \xi, \eta^1, \ldots, \eta^n)}{\partial \eta^j} \equiv 0 \tag{11}$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

II. En vertu de l'hypothèse H les fonctions $\hat{y}^i(x, \xi, \eta^1, \ldots, \eta^n)$ jouissent de la propriété suivante[5]): lorsque

$$x \geqslant \xi ; \quad \bar{\eta}^i \leqslant \tilde{\eta}^i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

alors:

$$\hat{y}^i(x, \xi, \bar{\eta}^1, \ldots, \bar{\eta}^n) \leqslant \hat{y}^i(x, \xi, \tilde{\eta}^1, \ldots, \tilde{\eta}) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Il en résulte que, pour $x \geqslant \xi$:

$$\frac{\partial \hat{y}^i(x, \xi, \eta^1, \ldots, \eta^n)}{\partial \eta^j} \geqslant 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

III. Il existe évidemment un nombre $b > 0$ tel que chaque caractéristique (10) passant par un point appartenant au cube:

$$|\xi - \mathring{x}| < b ; \quad |\eta^i - \mathring{y}^i| < b \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{15}$$

est définie dans l'intervalle:

$$|x - \mathring{x}| < b. \tag{16}$$

---

[4]) E. Kamke: *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930, p. 155, Satz 1.

[5]) cf. [1]), E. Kamke; loc. cit., p. 82, Satz 9.

Lemme 1. Supposons que les fonctions f^i soient de classe C^1 dans Ω et qu'elles satisfassent à l'hypothèse H. Supposons ensuite que les fonctions $\varphi^i(x)$, (cf. les hypothèses de notre théorème), remplissent les inégalités (8) et les égalités:

$$\varphi^i(x) = \psi^i(\mathring{x}) \;^{6)} \qquad (i=1,\dots,n) \tag{17}$$

et désignons par c un nombre positif tel que les courbes: $y^i = \psi^i(x)$; $y^i = \varphi^i(x)$ soient situées à l'interieur du cube (15), pour x appartenant à l'intervalle:

$$\mathring{x} \leqslant x \leqslant \mathring{x} + c. \tag{18}$$

Ceci étant supposé les inégalités (9) sont remplies dans l'intervalle (18).

Démonstration: Soit $\bar{x}$ un point appartenant à l'intervalle (18). Introduisons la transformation de l'espace à $(n+1)$ dimensions des points $(\xi, \eta^1, \dots, \eta^n)$:

$$x = \xi\,; \quad y^i = \hat{y}^i(\bar{x}, \xi, \eta^1, \dots, \eta^n) \qquad (i=1,\dots,n). \tag{19}$$

D'après la définition du cube (15) et de l'intervalle (18), la transformation (19) et de classe C^1 dans le cube (15).

Nous avons évidemment (cf. [6]):

$$\hat{y}^i\big(\bar{x}, \mathring{x}, \psi^1(\mathring{x}), \dots, \psi^n(\mathring{x})\big) \equiv \psi^i(\bar{x}) \qquad (i=1,\dots,n) \tag{20}$$

Désignons par $\Phi^i(\xi)$, $(i=1,\dots,n)$ l'image de la courbe $\varphi^i(\xi)$, $(i=1,\dots,n)$, par l'intermédiaire de la transformation (19), à savoir:

$$\Phi^i(\xi) = \hat{y}^i\big(\bar{x}, \xi, \varphi^1(\xi), \dots, \varphi^n(\xi)\big) \qquad (i=1,\dots,n). \tag{21}$$

En vertu de (17) nous avons:

$$\hat{y}^i\big(\bar{x}, \mathring{x}, \psi^1(\mathring{x}), \dots, \psi^n(\mathring{x})\big) = \hat{y}^i\big(\bar{x}, \mathring{x}, \varphi^1(\mathring{x}), \dots, \varphi^n(\mathring{x})\big) \qquad (i=1,\dots,n) \tag{22}$$

---

[6]) Dans les hypothèses du lemme 1., $\psi^i(x)$ désigne l'unique intégrale du système (1) passant par $\mathring{P}$.

d'où il résulte, d'après (20) et (21), que:

(23) $$\Phi^i(\mathring{x}) = \psi^i(\overline{x}) \qquad (i=1,\ldots,n).$$

D'autre part, d'après (21) et la définition des fonctions $\hat{y}^i(x, \xi, \eta^1, \ldots, \eta^n)$ nous avons:

(24) $$\Phi^i(\overline{x}) = \varphi^i(\overline{x}) \qquad (i=1,\ldots,n).$$

En prenant les dérivées approximatives des fonctions $\Phi^i(\xi)$ [7]) nous obtenons, en vertu des relations (8), et (14), presque partout dans l'intervalle:

(25) $$\mathring{x} \leqslant \xi \leqslant \overline{x}$$

les inégalités différentielles suivantes:

(26) $$\dot{\Phi}^i_a(\xi) = \left[\frac{\partial \hat{y}^i(\overline{x}, \xi, \eta^\varkappa)}{\partial \xi} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \hat{y}^i(\overline{x}, \xi, \eta^\varkappa)}{\partial \eta^j} \dot{\varphi}^j_a(\xi)\right]_{\eta^\varkappa = \varphi^\varkappa(\xi)} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\frac{\partial \hat{y}^i(\overline{x}, \xi, \eta^\varkappa)}{\partial \xi} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \hat{y}^i(\overline{x}, \xi, \eta^\varkappa)}{\partial \eta^j} f^j(\overline{x}, \xi, \eta^\varkappa)\right]_{\eta^\varkappa = \varphi^\varkappa(\xi)}.$$

Il en résulte, d'après l'identité (11), que:

(27) $$\dot{\Phi}^i_a(\xi) \leqslant 0 \qquad (i=1,\ldots,n)$$

presque partout dans l'intervalle (25).

Les fonctions $\Phi^i(\xi)$ étant absolument continues, généralisées, il résulte des inégalités (27) qu'elles sont décroissantes au sens large dans l'intervalle (25) [8]). Nous avons donc, en particulier, les inégalités:

(28) $$\Phi^i(\overline{x}) \leqslant \Phi^i(\mathring{x}) \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Il s'ensuit, en vertu de (23) et (24), que:

(29) $$\varphi^i(\overline{x}) \leqslant \psi^i(\overline{x}) \qquad (i=1,\ldots,n).$$

---

[7]) Les dérivées en question existent presque partout dans (18), les fonctions $\Phi^i(\xi)$ étant évidemment absolument continues, généralisées.

[8]) S. Saks: *Theory of the integral*, p. 225., Theorem (6,2), (Warszawa — Lwów 1937).

Comme $\bar{x}$ était un point quelconque de l'intervalle (18), nous en concluons que les inégalités (9) sont remplies dans l'intervalle (18) tout entier, ce qui termine la démonstration de notre lemme.

Lemme 2. Supposons que toutes les hypothèses de notre théorème ainsi que les égalités (17) soient satisfaites.

Nous affirmons que les inégalités (9) sont alors remplies dans un voisinage droit du point $\mathring{x}$.

Démonstration: Soit K un cube de centre $\mathring{P}(\mathring{x}, \mathring{y}^1, \ldots, \mathring{y}^n)$ tel que: $\overline{K} \subset \Omega$ [9]). Prenons N naturel suffisamment grand pour que chaque cube $K_\nu(x, y^1, \ldots, y^n)$ de demi-côté $\frac{1}{\nu}$ et dont le centre $P(x, y^1, \ldots, y^n)$ est un point quelconque du cube $\overline{K}$, soit contenu avec sa frontière dans Ω pour $\nu \geqslant N$.

Posons, pour $P(x, y^1, \ldots, y^n)$ appartenant à $\overline{K}$:

$$f^i_\nu(x, y^1, \ldots, y^n) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\displaystyle\iint\limits_{K_\nu(x, y^1, \ldots, y^n)} \ldots \iint f^i(\xi, \eta^1, \ldots, \eta^n)\, d\xi \cdot d\eta^1 \ldots d\eta^n}{\left(\dfrac{2}{\nu}\right)^{n+1}} \tag{30}$$

$$(i = 1, \ldots, n;\ \nu \geqslant N)$$

Les fonctions ainsi définies sont de classe C^1, satisfont à l'hypothèse H et tendent uniformément vers f^i dans le cube $\overline{K}$ [10]).

Nous pouvons supposer (en prenant au besoin une suite partielle) qu'on ait:

$$|f^i_\nu - f^i| < \frac{1}{\nu} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \nu \geqslant N) \tag{31}$$

pour tout point du cube $\overline{K}$.

---

[9]) $\overline{K}$ désigne le cube K avec sa frontière.

$\overline{K} \subset \Omega$ signifie que $\overline{K}$ fait partie de Ω.

[10]) J. Szarski: *Sur une méthode d'approximation des fonctions*. Ann. Soc. Pol. Math. T. XX.

En posant:

$$(32)\qquad g^i_\nu(x, y^1, \dots, y^n) \overset{\mathrm{df}}{=} f^i_\nu(x, y^1, \dots, y^n) + \frac{1}{\nu} \qquad (i = 1, \dots, n;\ \nu > N)$$

nous obtenons n suites de fonctions g^i_ν jouissant des propriétés suivantes:

(α) g^i_ν sont de classe C^1 dans $\overline{K}$

(β) $g^i_\nu > f^i$ (en vertu de (31) et (32)

(γ) $\lim\limits_{\nu\to\infty} g^i_n = f^i$ uniformément dans $\overline{K}$ $\qquad (i = 1, \dots, n;\ \nu \geqslant N)$.

(δ) $\dot{\varphi}^i_a \leqslant g^i_\nu(x, \varphi^1, \dots, \varphi^n)$ (en vertu de (8) et (β))

(ϵ) g^i_ν satisfont à l'hypothèse H dans $\overline{K}$

Considérons maintenant les systèmes d'équations différentielles:

$$(e_\nu)\qquad \dot{y}^i = g^i_\nu(x, y^1, \dots, y^n) \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Soit $y^i = \psi^i_\nu(x)$, $(i = 1, \dots, n)$, l'intégrale du système (e_ν) passant par le point $\mathring{P}(\mathring{x}, \mathring{y}^1, \dots, \mathring{y}^n)$.

Les fonctions g^i_ν étant évidemment bornées par la même constante dans $\overline{K}$, il existe un nombre positif b' tel que chaque intégrale de n'importe quel système (e_ν), issue d'un point appartenant au cube:

$$(33)\qquad |x - x_0| < b', \quad |y^i - \mathring{y}^i| < b' \qquad (i = 1, \dots, n)$$

est définie dans l'intervalle: $|x - x_0| < b'$.

Soit c' un nombre positif tel que les courbes: $y^i = \varphi^i(x)$; $y^i = \psi^i_\nu(x)$, $(\nu \geqslant N)$ soient contenues dans le cube (33) pour x appartenant à l'intervalle:

$$(34)\qquad \mathring{x} \leqslant x \leqslant \mathring{x} + c'.$$

En vertu des propriétés (α), (δ) et (ε) et du lemme 1, nous avons dans l'intervalle (34) les inégalités:

$$(35)\qquad \varphi^i(x) \leqslant \psi^i_\nu(x) \qquad (i = 1, \dots, n;\ \nu \geqslant N).$$

D'autre part il résulte [11]) des propriétés (β) et (γ) que:

$$\lim_{\nu\to\infty} \psi^i_\nu(x) = \psi^i(x) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{36}$$

dans l'intervalle (34).

Les relations (35) et (36) entraînent les inégalités (9) dans l'intervalle (34), ce qui termine la démonstration.

Lemme 3. Dans le hypothèses de notre théorème les inégalités (9) sont remplies dans un voisinage droit du point $\mathring{x}$.

Démonstration: Dans le cas des égalités (17) cela découle du lemme 2. Adressons nous donc au cas où l'une, au moins, des inégalités (7) est forte. Soit: $y^i = \overline{\psi}^i(x)$, $(i=1,\ldots,n)$ l'intégrale supérieure du système (1) pour laquelle on ait:

$$\varphi^i(\mathring{x}) = \overline{\psi}^i(\mathring{x}) \qquad (i=1,\ldots,n). \tag{37}$$

En vertu du lemme 2, nous avons les inégalités:

$$\varphi^i(x) \leqslant \overline{\psi}^i(x) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{38}$$

dans un voisinage droit du point $\mathring{x}$.

D'autre part, d'après (7) et (37), on a:

$$\overline{\psi}^i(\mathring{x}) \leqslant \psi^i(\mathring{x}) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{39}$$

d'où il résulte que [12]):

$$\overline{\psi}^i(x) \leqslant \psi^i(x) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{40}$$

dans un voisinage droit du point $\mathring{x}$.

En rapprochant les inégalités (38) et (40) nous obtenons la proposition du lemme 3.

Nous allons maintenant achever la démonstration de notre théorème à l'aide du lemme 3. Il en résulte d'abord que les inégalités (9) sont remplies dans un voisinage droit du point $\mathring{x}$. Désignons par $\overset{*}{x}$ la borne supérieure des points x appartenant

---

[11]) cf. [1]), E. Kamke: loc. cit. p. 80, Satz 8.

[12]) cf. [1]), E. Kamke: loc. cit. p. 82, Satz 9.

à l'intervalle (6) tels que les inégalités (9) sont remplies dans l'intervalle: $[\mathring{x}, x)$.

Nous affirmons que:

$$\overset{*}{x} = \mathring{x} + a. \tag{41}$$

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. En vertu de la continuité on aurait alors: $\varphi^i(\overset{*}{x}) \leqslant \psi^i(\overset{*}{x})$, $(i = 1, \ldots, n)$. En appliquant le lemme 3 au point $\overset{*}{x}$ (au lieu du point $\mathring{x}$) on arriverait à la contradiction avec la définition du nombre $\overset{*}{x}$. L'égalité (41) est donc remplie, ce qui termine la démonstration.

SUR LES FONCTIONNELLES CONTINUES ET MULTIPLICATIVES

Par A. Turowicz (Tyniec).

Introduction

Nous envisagerons un espace E, non vide, métrique et compact (en soi), et l'anneau de toutes les fonctions continues, réelles définies dans E. Cet anneau sera désigné par $\mathfrak{A}(E)$. Soit F une fonctionnelle réelle, définie dans $\mathfrak{A}(E)$. Nous la supposerons multiplicative, c'est à dire que $F(x\cdot y)=F(x)\cdot F(y)$, et continue, c'est à dire que la convergence uniforme de la suite des fonctions x_n vers une fonction x_0 entraine la convergence de la suite $F(x_n)$ vers $F(x_0)$.

M. Banach et M. Eidelheit ont posé le problème de trouver la forme générale des fonctionnelles définies de cette manière. La note présente contient la resolution de ce problème. Les résultats se trouvent exposés dans le théorème IV.

Il est à remarquer que le problème a été resolu d'abord dans un cas spécial par l'auteur en collaboration avec S. Kaczmarz, à savoir dans le cas où l'espace E est l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ et les fonctionnelles sont supposées non négatives. La méthode employée était toute autre que celle du mémoire présent; elle était basée sur l'application de l'intégrale de Stieltjes. Outre la determination de la forme générale de la fonctionnelle le mémoire contient la discussion de l'unicité de la représentation de la fonctionnelle par la formulé trouvée.

1. Notations.

La lettre E designera un espace non vide, métrique et compact (en soi), toujours le même dans la note présente.

Les points de cet espace serons désignés par t, ev. $t_1, t_2, \ldots$ La fermeture d'un ensemble Z, sera désignée par $\bar{Z}$, son complément par CZ.

$x(t), y(t), z(t)$ désigneront des fonctions réelles continues, définies dans tout l'espace E.

L'anneau des fonctions continues dans E sera désigné par $\mathfrak{A}(E)$. Cet anneau est un espace métrique, la distance étant définie par:

(1) $$(x,y) = \max_{t \in E} |x(t) - y(t)|$$

Une fonctionnelle F, définie dans $\mathfrak{A}(E)$, est multiplicative, si:

(2) $$F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y).$$

Une fonctionnelle F est continue, si

(3) $$\text{pour } (x, x_0) \to 0, \quad \text{on a} \quad F(x) \to F(x_0).$$

Il y a deux fonctionnelles multiplicatives et continues, triviales, savoir:

$$F(x) \equiv 0 \quad \text{et} \quad F(x) \equiv 1.$$

Φ désignera l'ensemble de toutes fonctionnelles réelles, multiplicatives et continues, non triviales, définies dans l'anneau $\mathfrak{A}(E)$.

Les éléments de cet ensemble seront désignés par $F, F_1, F_2, \ldots$

2. Les propriétés élémentaires des fonctionnelles de l'ensemble Φ.

(4) a) $$F(0) = 0.$$

Démonstration. On a pour tout $x \in \mathfrak{A}(E)$: $F(x) \cdot F(0) = F(0)$, et puisque il existe un $x_0 \in \mathfrak{A}(E)$, tel que: $F(x_0) \neq 1$, donc (4) est vrai.

(5) b) $$F(1) = 1.$$

Démonstration. On a pour tout $x \in \mathfrak{A}(E)$: $F(x) \cdot F(1) = F(x)$, et puisque il existe un $x_0 \in \mathfrak{A}(E)$, tel que: $F(x_0) \neq 0$, donc (5) est vrai.

(6) c) *Si pour tout $t \in E$ on a $x(t) \geqslant 0$, alors $F(x) \geqslant 0$.*

Démonstration.

$$F(x) = [F(\sqrt{x})]^2 \geqslant 0.$$

(7) d) $$|F(x)| = F(|x|).$$

Démonstration.

$$(F(x))^2 = F(x^2) = F(|x|^2) = (F(|x|))^2,$$

donc en vertu de (6) l'égalité (7) est vraie.

(8) e) *Si pour tout $t \in E$, on a: $0 \leqslant x_1(t) \leqslant x_2(t)$, alors $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.*

Démonstration. Supposons d'abord, que $x_1(t) < x_2(t)$; alors $x_2(t) > 0$ et en mettant pour $t \in E$: $x_1(t) = x_2(t) \cdot y(t)$, on a: $y \in \mathfrak{A}(E)$, $0 \leqslant y(t) < 1$ pour chaque t. Par conséquent la suite des fonctions $\{y^n(t)\}$ converge uniformément dans E vers 0, donc la fonctionnelle F étant continue: $F(y^n) = (F(y))^n \to 0$ pour $n \to \infty$. Nous avons donc $0 \leqslant F(y) < 1$, et puisque $F(x_1) \geqslant 0$ et $F(x_2) \geqslant 0$, on obtient $F(x_1') = F(x_2) \cdot F(y) \leqslant F(x_2)$.

Passons au cas général et posons $z_n(t) = x_2(t) + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Il découle du précédent que $F(x_1) \leqslant F(z_n)$. Mais $(z_n, x_2) \to 0$, donc $F(z_n) \to F(x_2)$, et par conséquent (8) est vrai.

(9) f) *Si pour tout $t \in E$, on a $x(t) \neq 0$, alors $F(x) \neq 0$.*

Démonstration. Prenons un arbitraire $y \in \mathfrak{A}(E)$. En mettant $y(t) = x(t) \cdot z(t)$ pour chaque $t \in E$, nous avons $z \in \mathfrak{A}(E)$. Par conséquent $F(y) = F(x) \cdot F(z)$. Si $F(x) = 0$, la fonctionnelle F serait triviale et n'appartiendrait pas à l'ensemble Φ.

3. Lemme I.

Pour chaque $F \in \Phi$ existe un ensemble non vide, fermé Z, tel que: $Z \subset E$ et si pour un $t_0 \in Z$ on a $x(t_0) = 0$, alors $F(x) = 0$.

Démonstration. Nous démontrerons d'abord qu'il existe une suite descendante ces ensembles non vides, fermés $\{D_n\}$, $D_{n+1} \subset D_n \subset E$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ telle que le diamètre de D_n ne surpasse pas $\frac{1}{2^n}$ et si $x(t) \equiv 0$ dans D_n, alors $F(x) = 0$.

La définition de D_1 est suivante: l'espace E étant métrique et compact, il existe un nombre fini des sphères fermées $K_1, K_2, \ldots, K_n$ de rayon $r = \frac{1}{4}$, telles que $E = \sum_{i=1}^{n} K_i$. Supposons,

que pour chaque sphère K_i existe une fonction $x_i \in \mathfrak{A}(E)$, nulle pour tous les points de la sphère, telle que $F(x_i) \neq 0$. On aurait $F(\prod_{i=1}^{n} x_i) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i) \neq 0$. Comme il est $\prod_{i=1}^{n} x_i(t) \equiv 0$ pour chaque $t \in E$, on aboutit à une contradiction. Par conséquent une sphère au moins jouit de la propriété que l'identité $x(t) \equiv 0$, pour t appartenant à cette sphère, entraine l'égalité $F(x) = 0$. Cette sphère sera désignée par D_1.

Supposons que nous avons défini déjà les ensembles $D_1, D_2, \ldots, D_k$ de la suite. Il existe alors un nombre fini des ensembles non vides, fermés $D_k^{(1)}, D_k^{(2)}, \ldots, D_k^{(p)}$ dont les diamètres ne surpassent pas $\frac{1}{2^{k+1}}$, tels que $D_k = \sum_{i=1}^{p} D_k^{(i)}$. En répétant le raisonnement dernièrment exposé, nous voyons qu'on peut prendre un de ces ensembles comme l'ensemble D_{k+1}. Ainsi l'existence de la suite est prouvée.

Nous désignerons un point commun de tous les ensembles D_n par t_0 (son existence est assurée).

Si $x(t_0) = 0$, on a $F(x) = 0$. En effet, soit $\{x_n\}$ une suite facile à construire, des fonctions $x_n(t)$, telles que $(x_n, x) \to 0$ et $x_n(t) \equiv 0$ dans D_n. On a alors $F(x_n) = 0$ et $F(x_n) \to F(x)$.

On définit Z comme l'ensemble de tous les points t_0 jouissants de la propriété que $x(t_0) = 0$ entraine $F(x) = 0$.

Notre raisonnement prouve que Z n'est pas vide.

Maintenant soit $t_0 \in \bar{Z}$ et $x(t_0) = 0$. Soit $\{x_n\}$ une suite des fonctions, facile à construire, telle que $(x_n, x) \to 0$ et $x_n(t)$ s'annule identiquement dans un entourage de t_0, qu'on désignera par U_n. Puisque $U_n \cdot Z \neq 0$, il est $F(x_n) = 0$, ce qui donne $F(x) = 0$, donc $t_0 \in Z$.

Notre lemme est ainsi démontré.

L'ensemble Z défini au cours de la démonstration sera nemmé l'ensemble caractéristique de la fonctionnelle F et la lettre Z sera resérvée pour le désigner.

4. Lemme II.

L'ensemble caractéristique Z d'une fonctionnelle $F \in \Phi$, est fini ou dénombrable.

Démonstration. Soit $t_0 \in Z$ et r un nombre positif. Nous définissons une fonction $x(t,r)$ de la manière suivante:

$$(10) \quad \begin{aligned} &x(t_0,r)=\tfrac{1}{2}; \quad \text{pour} \quad (t,t_0)>r, \ x(t,r)=1; \\ &\text{pour} \quad (t,t_0)\leqslant r, \ x(t,r)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2r}\cdot(t,t_0). \end{aligned}$$

On a $x(t,r) \in \mathfrak{A}(E)$ et $\tfrac{1}{2}\leqslant x(t,r)\leqslant 1$ pour $t \in E$. En raison de (5), (8) et (9) il est $0<F(\tfrac{1}{2})\leqslant F(x(t,r))\leqslant 1$.

Nous montrerons $\overline{\lim\limits_{r\to 0}} F(x(t,r))<1$.

Supposons en effet que $\overline{\lim\limits_{r\to 0}} F(x(t,r))=1$. Il existerait alors une suite $\{r_n\}$, $r_n>r_{n+1}$, $r_n>0$, $r_n\to 0$, telle que $F(x(t,r_n))\geqslant 1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$. Soit $y_n(t)=\prod\limits_{n=1}^{n} x(t,r_k)$. On voit facilement qu'il existe $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t)$ pour un arbitraire $t \in E$; il est $y_n(t_0)=\dfrac{1}{2^n}$, donc $y_n(t_0)\to 0$; pour $t\neq t_0$ les valeurs de $y_n(t)$ sont égales entre elles, si n est suffisamment grand, parce que alors $x(t,r_n)=1$. En désignant la limite des y_n par y_0, nous obtenons que $y_0(t)$ est continue; c'est évident pour $t\neq t_0$, et comme on peut déterminer un nombre positif p et un entourage de t_0 U, tels que $y_p(t)<\varepsilon$ pour $t \in U$, où ε est un nombre positif donné, la suite y_n étant non croissante, on obtient l'inégalité $y_n(t)<\varepsilon$ dans U pour $n>p$, et enfin $y_0(t)<\varepsilon$ dans U, ce qui prouve la continuité de y_0 au point t_0. La suite monotone des fonctions continues converge vers une fonction continue y_0, elle converge donc uniformément. Nous avons $F(y_n)\to F(y_0)$. Mais $y_0(t_0)=0$, et $t_0 \in Z$, donc $F(y_0)=0$, c'est à dire $F(y_n)\to 0$.

D'autre côte

$$F(y_n)=\prod_{k=1}^{n} F(x(t,r_k))\geqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\geqslant \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)>0,$$

ce que donne une contradiction.

Désignons $\overline{\lim} F(x(t,r))=\varphi(t_0)$. Soit $Z=\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$, où $t \in Z_n$, si $\dfrac{n-1}{n}\leqslant\varphi(t)<\dfrac{n}{n+1}$. Si Z était un ensemble indénombrable,

un au moins des ensembles Z_n le serait aussi. Notons cet ensemble par Z_k. Il existe une suite des sphères $\{K_n\}$, $K_n \subset E$, dont les centres sont t_n, $t_n \in Z_k$, telle que pour $p \neq q$, est $K_p \cdot K_q = 0$, et que pour la sphère K_n existe une fonction $x_n(t)$, $x_n \in \mathfrak{A}(E)$, $x_n(t) \geqslant \frac{1}{2}$ pour $t \in K_n$, et $x_n(t) = 1$ pour $t \in CK_n$, et enfin $F(x_n) < \dfrac{k}{k+1}$.

Mettons $z_n(t) = \prod_{i=1}^{n} x_i(t)$ dans E. Deux sphères aux indices différents n'ayant pas des points communs, il est dans E $z_n(t) \geqslant \frac{1}{2}$. Par conséquent $F(\frac{1}{2}) \leqslant F(z_n) = \prod_{k=1}^{n} F(x_i) \leqslant \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^n$. Le nombre n étant arbitraire on a: $F(\frac{1}{2}) \leqslant 0$. D'autre côté en raison de (6) et (9) il est $F(\frac{1}{2}) > 0$. Il suit de la contradiction obtenue que le lemme est vrai.

5. Lemme III.

Si $F \in \Phi$, $x \in \mathfrak{A}(\bar{E})$, et $x(t) = 1$ dans Z, alors $F(z) = 1$.

Démonstration. Remarquons d'abord que si $t_0 \in CZ$, alors existe un entourage U_{t_0} du point t_0, pour lequel existe une fonction $y_0 \in \mathfrak{A}(E)$, telle que $x_0(t) = 0$ dans U_{t_0} et $F(x_0) \neq 0$. En effet dans le cas contraire on déduirait en s'appuyant sur la continuité de la fonctionnelle F que $t_0 \in Z$, parce que chaque fonction nulle pour $t = t_0$ est une limite d'une suite uniformément convergente des fonctions identiquement nulles dans les entourages de t_0.

Nous montrérons maintenant, que si $x_0(t) \equiv 1$ dans CA ou A est un ensemble fermé $A \subset CZ$, alors $F(x_0) = 1$. Soient $U_{t_1}, U_{t_2}, \ldots, U_{t_n}$ une famille finie des entourages des points $t_i \in A$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, telle que $A \subset \sum_{i=1}^{n} U_{t_i}$ et qu'elles existent les fonctions y_i jouissantes de la propriété $y_i(t) = 0$ dans U_{t_i} et $F(y_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Alors la fonction $y(t) = \prod_{i=1}^{n} y_i(t)$ est identiquement nulle dans A, et $F(y) \neq 0$. Puisque $x_0(t) \equiv 1$ dans CA il est $y(t) \equiv x_0(t) \cdot y(t)$ dans E, donc $F(y) = F(x_0) \cdot F(y)$, c'est à dire $F(x_0) = 1$.

Soit $x_0(t)$ une fonction satisfaisante aux hypothèses du lemme.

Soit A_n l'ensemble composé de tous les points de E, tels que $(t,Z)\geqslant\frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\ldots,)$. On construit facilement une suite $\{x_n\}$, $(x_n,x_0)\to 0$ et $x_n(t)\equiv 1$ dans CA_n. On a $F(x_n)=1$, $(n=1,2,\ldots)$, donc $F(x_0)=1$.

6. Lemme IV.

Si $F\in\Phi$, $x_1,x_2\in\mathfrak{A}(E)$ et $x_1(t)\equiv x_2(t)$ dans Z, alors $F(x_1)=F(x_2)$.

Démonstration. Il suffit considérer le cas dans lequel les fonctions x_1 et x_2 ne s'annullent pas pour aucun point de Z; dans le cas contraire le lemme est évident.

Supposons d'abord que $x_1(t)=x_2(t)>0$ dans Z. Alors existe une fonction $x_0(t)$ égale à x_1 et x_0 dans Z, pour laquelle l'inégalité $x_0(t)>0$ subsiste dans tout l'espace E. Nous mettons $x_1(t)=x_0(t)\cdot y_1(t)$ et $x_2(t)=x_0(t)\cdot y_2(t)$ dans E, et obtenons $y_1,y_2\in\mathfrak{A}(E)$ et $y_1(t)=y_2(t)\equiv 1$ dans Z, d'où l'on tire

$$F(x_1)=F(x_0)\cdot F(y_1)=F(x_0)=F(x_0)\cdot F(y_2)=F(x_2).$$

Dans le cas où il y a des points dans Z pour lesquels les fonctions x_1 et x_2 deviennent negatives, on a en raison du précédent et de (7) $|F(x_1)|=|F(x_2)|$. Il faut montrer encore que $F(x_1)\cdot F(x_2)\geqslant 0$.

Mais $x_1(t)\cdot x_2(t)>0$ dans Z, il existe donc une fonction $x_3(t)$ continue et positive dans E et égale dans Z au produit de x_1 et x_2. En raison du précédent il est $F(x_1,\cdot x_2)=F(x_3)$, et on déduit de (6) que $F(x_3)\geqslant 0$. Ainsi le lemme est démontré.

7. Définition d'une fonctionnelle linéaire.

Soit $y\in\mathfrak{A}(E)$. Mettons $G(y)=\log F(e^{y(t)})$, ou $F\in\Phi$.

Cette définition définit une fonctionnelle réelle dans $\mathfrak{A}(E)$, puisque $F(e^y)>0$ en raison de (6) et (9). On vérifie aisément que G est une fonctionnelle linéaire.

On déduit du lemme IV. que $F(x)$ dépend exclusivement des valeurs de la fonction $x(t)$ dans l'ensemble caractéristique Z. Nous considérons cet ensemble comme un espace métrique, dénombrable et compact (en conservant la métrique de l'espace E). De même on peut envisager la fonctionnelle F comme une fonctionnelle multiplicative et continue dans

l'espace $\mathfrak{A}(Z)$ de toutes les fonctions réelles continues définies dans Z (on conserve dans $\mathfrak{A}(Z)$ la métrique de l'espace $\mathfrak{A}(E)$), et par conséquent G est une fonctionnelle linéaire dans $\mathfrak{A}(Z)$.

D'après un théorème de S. Mazur l'espace $\mathfrak{A}(Z)$ est isomorphe à l'espace c_0 (des suites convergentes vers zéro).

S. Mazur a tiré de son théorème un corollaire suivant: la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace $\mathfrak{A}(Z)$ est:

$$G(y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n y(t_n). \tag{11}$$

où $y\in\mathfrak{A}(\dot{Z})$, $\{t_n\}=Z$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ (a_n nombres réels).

8. La valeur absolue de la fonctionnelle F.

En applicant le resultat de S. Mazur à la fonctionnelle définie dans le No 7. on pourrait aisément en tenant compte de (8) prouver que pour cette fonctionnelle spéciale il est: $a_n\geqslant 0$ $(n=1,2,...)$.

Nous pouvons cependant obtenir un resultat plus fort en raisonnant de la manière suivante:

Soit

$$G(y)=\log F(e^y) \tag{12}$$

où $F\dot{\epsilon}\Phi$, $y\in\mathfrak{A}(E)$; soit $t_0\in Z$. Prenons une suite $\{y_n\}$, $y_n\in\mathfrak{A}(E)$:

$$y_n(t_0)=\log\tfrac{1}{2},\quad \text{pour}\quad (t,t_0)\leqslant\frac{1}{n}\quad \text{soit}\quad y_n(t)=\log\frac{1+n\cdot(t,t_0)}{2},$$

$$\text{pour}\quad (t,t_0)>\frac{1}{n}\quad \text{soit}\ y_n(t)=0$$

(nous avons pris ici les logarithmes des fonctions $x(t,r)$ employées dans la démonstration du lemme II, avec $r=\dfrac{1}{n}$).

On tire de la démonstration du lemme II que $\overline{\lim}\, G(y_n)<0$.

D'après la définition il est $|y_n(t)|\leqslant\log 2$ dans E pour $n=1,2,...$

D'après la formule (11) il est $G(y_n)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i y_n(t_i)$. Le point t_0 paraît dans cette formule avec un indice k (k un entier positif)

c'est à dire $t_0=t_k$. La fonction y_n s'annulant en dehors de l'entourage $(t,t_0)<\frac{1}{n}$, on peut choisir pour un arbitraire N entier positif, un entier positif p de telle manière que pour $n>p$, $i\leqslant N$, $i\neq k$, soit $y_n(t_i)=0$. On aura

$$G(y_n)=a_k y_n(t_k)+R=a_k \log \tfrac{1}{2}+R$$

où

$$|R|\leqslant \log 2\cdot \sum_{i=N+1}^{\infty}|a_i|.$$

Pour des n assez grands est $G(y_n)<0$, et $\sum_{i=N+1}^{\infty}|a_i|$ tend vers 0 avec $N\to\infty$ on a donc $a_k \log \frac{1}{2}<0$, ou $a_k>0$.

En mettant dans la formule (12) $x(t)=e^{y(t)}$, on parvient à la conclusion: pour $x(t)>0$ dans Z, existe une suite $\{a_n\}$, $a_n>0$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i<\infty$, telle que

$$F(x)=e^{\sum_{i=1}^{\infty} a_i \log x(t_i)}=\prod_{i=1}^{\infty}(x(t_i))^{a_i}.$$

La convergence du produit infini est évidente parce que, l'ensemble Z étant fermé, la fonction $x(t)$ est bornée dans Z et ses maximum et minimum sont positifs.

La formule obtenus reste vraie aussi dans le cas si $x(t)$ s'annule pour un point de Z, parce que alors tous les deux termes de la formule sont nuls.

En tenant compte de (7) on peut écrire pour $F\in\Phi$:

(13) $$|F(x)|=\prod_{i=1}^{\infty}|x(t_i)|^{a_i}.$$

Nous démontrérons maintenant une proposition reciproque, c'est à dire que le second terme de (13) est une fonctionnelle de l'ensemble Φ, non négative, sous l'hypothèse que $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots)$ et $\sum_{i=1}^{\infty} a_i<\infty$.

Or, le produit infini est égal à zéro pour un x s'annulant pour un point de Z, ou il converge vers un nombre positif.

Une fonctionnelle définie par ce produit est évidemment multiplicative. Nous vérifions la continuité: soit $\{x_n\}$ une suite convergente uniformément dans E vers x_0. Si $x_0(t_k)=0$, où t_k est un point de Z, alors la fonctionnelle s'annule pour x_0, et en écrivant le produit infini pour x_n sous la forme: $x_n(t_k)|^{\alpha_k}\cdot\prod_{i=1}^{\infty}{}'|x_n(t_i)|^{\alpha_i}$, ou la caractéristique Π' désigne qu'oni doit omettre dans le produit le facteur de l'indice k, on voit que la convergence de la suite des fonctionnelles a lieu.

De même si $x_0(t)\neq 0$ dans Z, alors existent deux nombres positifs m et M, tels que pour n assez grand $m<x_n(t)<M$ et $m<x_0(t)<M$, d'où en prenant les logarithmes des produits infinis on tire immédiatement $\prod_{i=1}^{\infty}x_n(t_i)^{\alpha_i}\to\prod_{i=1}^{\infty}x_0(t_i)^{\alpha_i}$.

Il est évident enfin que la fonctionnelle définie par le produit n'est pas triviale. Ainsi nous avons établi que la fonctionnelle appartient a Φ.

Remarque. Dans les raisonnements du N⁰ 8 nous admettions que l'ensemble caractéristique Z est dénombrable. Dans le cas où il est fini on obtient, les mêmes résultats avec cette modification, que au lieu d'un produit infini il faut mettre un produit fini. Les démonstrations sont analogues, mais plus simples et donnent:

(14) $$|F(x)|=\prod_{i=1}^{n}|x(t_i)|^{\alpha_i},\quad \alpha_i>0.$$

Les résultats obtenus résume le:

Théorème 1. *Pour que $F\epsilon\Phi$ et $F(x)\geqslant 0$, il faut et il suffit que* a) *dans le cas ou l'ensemble caractéristique Z est infini, soit $F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}|x(t_n)|^{\alpha_n}$, où $\{t_n\}=Z$ et $\{\alpha_n\}$ est une suite arbitraire, telle que $\alpha_n>0$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$;* b) *dans le cas ou l'ensemble caractéristique Z est fini, soit $F(x)=\prod_{n=1}^{p}|x(t_n)|^{\alpha_n}$, où $\alpha_n>0$ $(n=1,2,\ldots,p)$ et $t_1,t_2,\ldots,t_p$ forment tout l'ensemble Z.*

9. Le signe de la fonctionnelle.

Chaque fonctionnelle $F \epsilon \Phi$ on peut écrire:

$$F(x) = |F(x)| \cdot \operatorname{sgn} F(x)$$

où $|F(x)| \epsilon \Phi$ et est une fonctionnelle non négative pour $x \epsilon \mathfrak{A}(E)$; l'ensemble caractéristique pour $|F|$ est identique avec l'ensemble caractéristique pour F. La forme de la fonctionnelle $|F|$ est donnée par le théorème I. Il reste à déterminer la forme de l'expression

(15) $$S(x) = \operatorname{sgn} F(x).$$

Remarquons que $S(x)$ est une fonctionnelle multiplicative définie dans $\mathfrak{A}(E)$, qui admet trois valeurs au plus: 0, 1, —1.

Si $t_n \epsilon Z$ (n nombre entier positif) et $\operatorname{sgn} x(t_n) = 0$, alors $S(x) = 0$. Reciproquement si $S(x) = 0$, alors il est $\operatorname{sgn} x(t_n) = 0$ pour un $t_n \epsilon Z$. S'il est $x_1(t) \cdot x_2(t) > 0$ dans Z, alors $S(x_1) = S(x_2)$, parce que $F(x_1 \cdot x_2) > 0$, donc $\operatorname{sgn} F(x_1) = \operatorname{sgn} F(x_2)$.

Par conséquent $S(x)$ dépend uniquement de la suite $\{\operatorname{sgn} x(t_n)\}$, où $\{t_n\} = Z$, $S(x)$ est donc une fonctionnelle dans l'espace des suites $\{\operatorname{sgn} x(t_n)\}$, où $x \epsilon \mathfrak{A}(E)$.

10. La fonctionnelle réduite.

Soit $Z = Z_1 + Z_2$, où Z_1 et Z_2 sont des ensembles fermés, sans points communs. Posons $S_1(x) = S(\bar{x})$, où $\bar{x} \epsilon \mathfrak{A}(E)$ et $\operatorname{sgn} \bar{x}(t) \equiv \operatorname{sgn} x(t)$ dans Z_1, $\operatorname{sgn} \bar{x}(t) = 1$ dans Z_2. Pour chaque x existe un $\bar{x}$ jouissant des propriétés requises, puisque la distance des ensembles Z_1 et Z_2 est positive; la valeur de $S_1(x)$ ne dépend pas évidemment du choix de la fonction satisfaisante aux conditions données. La fonctionnelle $S_1(x)$ sera nommée un réduit de la fonctionnelle S à l'ensemble Z_1.

Lemme V.

Soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ des ensembles fermés, $Z_i \cdot Z_k = 0$ pour $i \neq k$, $Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, soit enfin S_i un réduit de la fonctionnelle S à l'ensemble Z_i; alors

$$S(x) = \prod_{i=1}^{n} S_i(x) \quad \textit{pour} \quad x \epsilon \mathfrak{A}(E).$$

Démonstration. Il suffit de considérer le cas dans lequel $x(t) \neq 0$ dans Z. Soient x_i $(i=1,2,...,n)$ des fonctions $x_i(t) \in \mathfrak{A}(E)$, telles que $x_i(t)=x(t)$ dans Z_i et $x_i(t)=1$ dans $Z-Z_i$. Alors $S(x)=\prod_{i=1}^{n} S(x_i)$, puisque $x(t)=\prod_{i=1}^{n} x_i(t)$ dans Z. De l'autre côté $S_i(x)=S(x_i)$, ce qui donne le lemme.

Lemme VI.

Soit $S(x)=\operatorname{sgn} F(x)$, $F \in \Phi$ *et* $t_0 \in Z$. *Soit* $Z=\sum_{i=1}^{\infty} Z_i$, *où* Z_i *sont des ensembles fermés,* $Z_j \cdot Z_k=0$ *pour* $j \neq k$, Z_0 *contient un seul point* t_0, $\lim_{n\to\infty} Z_n=Z_0$ *(dans le sens de Hausdorff). Soient enfin* $S_i(x)$ *pour* $i=1,2,3,...$ *les réduits* [1] *de la fonctionnelle* S *aux ensembles* Z_i.

Alors existe une permutation de l'ensemble des nombres entiers positifs $(k_1,k_2,\dots,k_n,...)$ *et existe une fonctionnelle* $S_0(x)$ *égale à* $\operatorname{sgn} x(t_0)$ *ou à* $\operatorname{sgn}^2 x(t_0)$, *telles que:*

$$S(x)=S_0(x)\cdot\prod_{i=1}^{\infty}[S_{k_{2i-1}}(x)\cdot S_{k_{2i}}(x)].$$

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $x(t) \neq 0$ dans Z. Nous repartissons les nombres entiers positifs en deux classes K_1 et K_2 de la manière suivante: $n \in K_1$, si $S_n(x)=1$ pour toutes les fonctions satisfaisantes à la condition $x(t)<0$ dans Z_n; dans le cas contraire, c'est à dire si l'inégalité $x(t)<0$ dans Z_n, implique l'égalité $S_n(x)=-1$ on a $n \in K_2$. Nous définirons maintenant la permutation $(k_1,k_2,...)$ des nombres entiers positifs. Nous posons $k_1=1$. Si une des classes K_1 et K_2 est finie et contient un nombre impair des éléments alors k_2 est égal au plus petit nombre de la classe, qui ne contient pas le nombre 1; dans les autres cas k_2 est égal au plus petit nombre, différent de 1, de la classe qui contient le nombre 1. Si les nombres $k_1,k_2,...,k_{2p}$, sont déjà définis, alors k_{2p+1} est égal au plus petit nombre entier positif non contenu dans la suite

---

[1]) Les fonctionnelles S_i sont bien définies parce que l'ensemble $Z-Z_{n_1}-Z_{n_2}...-Z_{n_r}$ $(n_i \geqslant 1)$ est fermé pour chaque suite finie des nombres $n_1, n_2,..., n_r$, ce qui est facile à voir.

finie $k_1, \dots, k_{2p}$, et k_{2p+2} est égal au plus petit nombre de la même classe que k_{2p+1}, différent des nombres $k_1, k_2, \dots, k_{2p+1}$. Ainsi la permutation est définie et nous posons

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} [S_{k_{2i-1}}(x), S_{k_{2i}}(x)].$$

$P(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathfrak{A}(E)$, à condition que $x(t_0) \neq 0$: si $x(t_0) > 0$, alors $x(t) > 0$ pour t appartenant à presque tous les ensembles Z_n, il est donc pour i assez grand

$$[S_{k_{2i-1}}(x) \cdot S_{k_{2i}}(x)] = 1.$$

D'après notre définition de la permutation $(k_1, k_2, k_3, \dots)$ cette égalité subsiste aussi pour $x(t_0) < 0$, et par conséquent le produit infini converge pourvu que $x(t_0) \neq 0$. On voit que $P(x)$ est une fonctionnelle multiplicative. Nous définirons maintenant la fonctionnelle multiplicative $S_0(x)$ de la manière suivante: posons $x_0(t) \equiv -1$ dans E; soit

$$S_0(x) = \operatorname{sgn}^2 x(t_0), \quad \text{si} \quad S(x_0) \cdot P(x_0) = 1$$
$$S_0(x) = \operatorname{sgn} x(t_0), \quad \text{si} \quad S(x_0) \cdot P(x_0) = -1.$$

Nous montrérons que $S(x) = S_0(x) \cdot P(x)$. (Le second terme de cette égalité est défini même si $x(t_0) = 0$, puisque alors $S_0(x) = 0$).

Supposons d'abord que $x(t_0) > 0$. On a $x(t) > 0$ dans presque tous les Z_n. En désignant par R la somme de tous les ensembles Z_n, dans lequels on a constamment $x(t) > 0$, nous avons $Z = R + Z_{m_1} + Z_{m_2} \dots + Z_{m_r}$ (la distribution de l'ensemble Z dépend de la fonction $x(t)$), où tous les ensembles du terme second sont fermés. Le réduit de la fonctionnelle S à l'ensemble R étant égal à 1 (pour la fonction considérée), on a en raison du lemme V. $S(x) = \prod_{i=1}^{r} S_{m_i}(x)$. Mais $(P(x)$ est égal au même produit, et $S_0(x) = 1$, le lemme est donc vrai.

Soit maintenant $x(t_0) < 0$. D'après le précédent il est:

$$S(-x) = S_0(-x)_0 P(-x),$$

ou

$$S(x_0) \cdot S(x) = S_0(x_0) \cdot S_0(x) \cdot P(x_0) \cdot P(x).$$

Il vient de l'hypothèse $x(t) \neq 0$ dans Z, que tous les facteurs dans l'égalité dernière sont égaux à *1* ou à *—1*; il est donc

$$S(x) = [S(x_0) \cdot S_0(x_0) \cdot P(x_0)] \cdot S_0(x) \cdot P(x).$$

D'après la définition de $S_0(x)$ l'expréssion dans le crochet est égale à *1* pour $x(t_0) < 0$, le lemme est donc démontré.

11. La forme de la fonctionnelle $S(x)$.

Théorème II. *Si* $S(x) = \operatorname{sgn} F(x)$, $F \in \Phi$, *alors existe un ordonnement des éléments de l'ensemble* Z, $Z = \{t_n\}$ *et une suite* $\{\beta_n\}$, *où* $\beta_n = 1$ *ou* $\beta_n = 2$, $(n = 1, 2, \ldots)$, *tels que pour* $x \in \mathfrak{A}(E)$:

$$(16) \qquad S(x) = \operatorname{sgn}^{\beta_1} x(t_1) \cdot \operatorname{sgn}^{\beta_2} x(t_2) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} [\operatorname{sgn} x(t_{2i+1}) \cdot \operatorname{sgn} x(t_{2i+2})]^{\beta_{i+2}}.$$

Dans le cas où Z *est un ensemble fini, le produit est fini, et si le nombre des éléments de* Z *est impair, on a un facteur seulement avant la caractéristique* Π.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $x(t) \neq 0$ dans Z; dans le cas contraire le théorème est évident.

Nous nous appuyerons sur le théorème, que pour chaque ensemble dénombrable existe un nombre ordinal α, tel que la dérivée de cet ensemble de l'ordre α est un ensemble fini, non vide.

La démonstration sera faite par induction transfinie: on vérifiera que le théorème est vrai lorsque le nombre α pour l'ensemble Z est égal à *0*, puis en le supposant vrai pour les fonctionnelles dont les ensembles caractéristiques ont les dérivées finies, non vides de l'ordre ξ, où $\xi < \gamma$, on montréra que le théorème reste vrai, lorsque l'ordre de la dérivée finie, non vide de l'ensemble Z est égal à γ. Dans le cas $\alpha = 0$, on obtient immédiatement notre théorème du lemme V., et du fait que, si Z contient un seul point t_1, alors $S(x)$ est égal à $\operatorname{sgn} x(t_1)$ ou $\operatorname{sgn}^2 x(t_1)$ suivant que $S(x)$ est négatif ou positif pour $x(t_1) < 0$.

Supposons donc, que le théorème soit vrai pour toutes les fonctionnelles dont les ensembles caractéristiques ont une dérivée finie, non vide d'ordre ξ, $\xi < \gamma$, et que l'ensemble Z a une dérivée finie d'ordre γ, contenante q points $(q > 0)$. L'ensemble Z étant fermé et dénombrable, il peut etre partagé

en des ensembles fermés $Z_1, Z_2, ..., Z_q$ dont chacun a la dérivée d'ordre γ composée d'un seul point. Désignons les réduits de la fonctionnelle $S(x)$ aux ensembles Z_i par $S_i(x)$. On voit qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où la dérivée d'ordre γ de l'ensemble caractéristique contient un seul point: si

$$S_j(x) = \mathrm{sgn}^{\beta_1^{(j)}} x(t_1^{(j)}) \cdot \mathrm{sgn}^{\beta_2^{(j)}} x(t_2^{(j)}) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} [\mathrm{sgn}\, x(t_{2i+1}^{(j)}) \cdot \cdot \mathrm{sgn}\, x(t_{2i+2}^{(j)})]^{\beta_{i+2}^{(j)}}$$

pour $j = 1, 2, ..., q$, alors en raison du lemme V.:

$$S(x) = \prod_{j=1}^{q} \left(\mathrm{sgn}^{\beta_1^{(j)}} x(t_1^{(j)}) \cdot \mathrm{sgn}^{\beta_2^{(j)}} x(t_2^{(j)}) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} [\mathrm{sgn}\, x(t_{2i+1}^{(j)}) \cdot \mathrm{sgn}\, x(t_{2i+2}^{(j)})]^{\beta_{i+2}^{(j)}} \right)$$

d'où on tire immédiatement le théorème parce que 1⁰ l'expression du second terme peut être écrite comme un produit infini simple; 2_0 en permutant un nombre fini des facteurs $\mathrm{sgn}^{\beta_n} x(t_n)$ on obtient la forme de (16).

Nous supposons donc que la dérivée d'ordre γ de l'ensemble Z contient un seul point t_0. L'ensemble $Z-(t_0)$ sera reparti en une famille dénombrable des ensembles fermés $\{Z_n\}$, dont chaques deux sont disjoints, de la façon suivante:

1⁰ si $\gamma = 1$, alors chaque ensemble Z_n contient deux points de $Z-(t_0)$; 2⁰ si $\gamma > 1$; alors on prend une suite des nombres $\{r_n\}$, $r_n > 0$, $r_n \to 0$, tels que si $t \in Z$, alors $(t, t_0) \neq r_n$ $(n = 1, 2, ...)$. Telle suite existe, puisque dans le cas contraire l'ensemble Z serait indénombrable. Z'_n soit l'ensemble de tous les points de Z, tels que $r_n < (t, t_0) < r_{n-1}$; $(r_0 = \infty)$. Puisqu'il est $\gamma > 1$, donc il y a une infinité des ensembles Z'_n, qui contiennent une infinité des points. Par conséquent on peut réunir chaque ensemble Z'_m vide ou fini à un ensemble Z'_k infini, opérant toutefois de cette façon que deux ensembles Z'_m différents soient réunis à des ensembles Z'_k différents. La famille dénombrable, obtenue par cette opération forme la suite des ensembles $\{Z_n\}$, que nous allions définir. Il est éssentiel pour les raisonnements suivants, que tous les ensembles Z_n sónt ou infinis ou contiennent un nombre pair des éléments. Il est facile à voir que 1⁰ les ensembles Z_n satisfont aux conditions du lemme VI; 2⁰ chaque ensemble Z_n a une dérivée finie d'ordre inférieur à γ.

Les éléments de l'ensemble Z_n serons désignés par $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots$ (cette suite peut être finie, elle est composée alors de deux éléments).

$S_n(x)$ aient la même signification que dans le lemme VI.

En raison de l'hypothèse admise il est pour $n \geqslant 1$:

$$S_n(x) = \operatorname{sgn}^{\beta_1^{(n)}} x(t_1^{(n)}) \operatorname{sgn}^{\beta_2^{(n)}} x(t_2^{(n)}) \prod_{i=1}^{\infty} [\operatorname{sgn} x(t_{2i+1}^{(n)}) \operatorname{sgn} x(t_{2i+2}^{(n)})]^{\beta_{i+2}^{(n)}}.$$

Remarquons qu'il est $S_n(-1) = 1$, ou $S_n(-1) = -1$, suivant que $\beta_1^{(n)} = \beta_2^{(n)}$, ou $\beta_1^{(n)} \neq \beta_2^{(n)}$. Le lemme VI donne:

$$S(x) = S_0(x) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} [S_{k_{2i-1}}(x) \cdot S_{k_{2i}}(x)].$$

Vu la définition de la permutation $k_1, k_2, \ldots$ dans la démonstration du lemme VI, on a pour $i \geqslant 2$:

$$\beta_1^{(k_{2i-1})} + \beta_2^{(k_{2i-1})} + \beta_1^{(k_{2i})} + \beta_2^{(k_{2i})} \equiv 0 \pmod 2.$$

Par conséquent on peut écrire pour $i \geqslant 2$:

$$S_{k_{2i-1}}(x) \cdot S_{k_{2i}}(x) = \prod_{j=1}^{\infty} [\operatorname{sgn} x(\tau_{2j+1}^{(i)}) \cdot \operatorname{sgn} x(\tau_{2j+2}^{(i)})]^{\varepsilon_{j+2}^{(i)}},$$

où les $\tau_3^{(i)}, \tau_4^{(i)} \ldots$ sont des éléments convenablement ordonnés de l'ensemble $Z_{k_{2i-1}} + Z_{k_{2i}}$, et $\varepsilon_j^{(i)}$ sont égaux à *1* ou *2*.

Il est aussi:

$$S_{k_1}(x) \cdot S_{k_2}(x) = \operatorname{sgn}^{\varepsilon_1^{(1)}} x(\tau_1^{(1)}) \cdot \operatorname{sgn}^{\varepsilon_2^{(1)}} x(\tau_2^{(1)}) \cdot \\ \cdot \prod_{j=1}^{\infty} [\operatorname{sgn} x(\tau_{2j+1}^{(1)}) \cdot \operatorname{sgn} x(\tau_{2j+2}^{(1)})]^{\varepsilon_{j+2}^{(1)}}.$$

Nous avons donc:

$$S(x) = S_0(x) \cdot \operatorname{sgn}^{\varepsilon_1^{(1)}} x(\tau_1^{(1)}) \cdot \operatorname{sgn}^{\varepsilon_2^{(1)}} x(\tau_2^{(1)}) \cdot \\ \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} [\operatorname{sgn} x(\tau_{2j+1}^{(i)}) \cdot \operatorname{sgn} x(\tau_{2j+2}^{(i)})]^{\varepsilon_{j+2}^{(i)}},$$

ou en posant

$$[\operatorname{sgn} x(\tau_{2j+1}^{(i)}) \cdot \operatorname{sgn} x(\tau_{2j+2}^{(i)})]^{\varepsilon_{j+2}^{(i)}} = \eta_j^{(i)}(x), \quad P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \eta_j^{(i)}(x)$$

on obtient

$$S(x) = S_0(x) \cdot \operatorname{sgn}^{\varepsilon_1^{(1)}} x(\tau_1^{(1)}) \cdot \operatorname{sgn}^{\varepsilon_2^{(1)}} x(\tau_2^{(1)}) \cdot P(x).$$

Les éléments de la suite à double entrée $\{\eta_j^{(i)}(x)\}$ forment une suite simple, si l'on prend un après l'autre les éléments pour lequels il est $i+j=2,3,4,\ldots$ Les éléments de cette suite serons désignés par $\eta_n(x)$.

Nous disons que $P(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \eta_n(x)$.

En effet la fonction $x(t)$ étant continue, elle est du même signe que $x(t_0)$ dans presque tous les ensembles $Z_{k_{2i+1}} + Z_{k_{2i}}$, il est donc pour presque toutes les valeurs de i $\eta_j^{(i)}(x) = 1$, $(j=1,2,3,\ldots)$.

Le produit $\prod_{j=1}^{\infty} \eta_j^{(i)}(x)$ étant convergent pour chaque i, donc la valeur de i étant donnée, un nombre fini seulement des facteurs $\eta_j^{(i)}(x)$ satisfait à l'égalité $\eta_j^{(i)}(x) = -1$. Par conséquent cette égalité subsiste pour un nombre fini des couples (i,j), ce qui donne $P(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \eta_n(x)$.

Nous avons $S_0(x) = \operatorname{sgn}^{\epsilon_0} x(t_0)$, où $\epsilon_0 = 1$, ou $\epsilon_0 = 2$. Il est donc

(17) $$S(x) = \operatorname{sgn}^{\varepsilon_0} x(\tau_0) \operatorname{sgn}^{\varepsilon_1} x(\tau_1) \operatorname{sgn}^{\varepsilon_2} x(\tau_2) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} [\operatorname{sgn} x(\tau_{2i+1}) \cdot \operatorname{sgn} x(\tau_{2i+1})]^{\varepsilon_{i+2}}$$

où $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ sont des éléments de l'ensemble Z convenablement ordonnées, τ_0 est identique avec t_0, ε_i égal à *1* ou *2*.

Il s'agit de ramener l'expression (17) à la forme (16).

Supposons d'abord qu'il a y une infinité des exposants satisfaisants à $\varepsilon_n = 2$. La valeur du produit infini ne sera pas changée pour $x(t) \neq 0$ dans Z, si l'on enlève tous les facteurs

pourvus de l'exposant *2*. Deux au moins des nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont égaux; on réunit les sgn $x(\tau)$ corréspondants en un couple et on met le facteur obtenu sur la première place libre dans le produit infini. Le troisième sgn x, qui figurait avant la caractéristique Π et un sgn x, appartenant à un facteur enlevé restent avant la caractéristique Π et on remet tous les autres sgn x, réunis arbitrairement en des couples, dans le produit infini. Ainsi on parvient à la formule (16).

Supposons maintenant qu'il est $\varepsilon_n = 1$ pour presque toutes les valeurs de n. $\{U_n\}$ soit alors une suite des entourages du point t_0, telle que $U_{n+1} \subset U_n$ et $\prod_{n=1}^{\infty} U_n = (t_0)$. Nous disons que pour chaque n existe un indice $m = m(n)$, tel que $\tau_{2m+1} \in U_n$ et $\tau_{2m+2} \in U_n$ et $\varepsilon_{m+2} = 1$. En effet d'après les hypothèses admises existe une infinité des indices i pour lesquels $\tau_{2i+1} \in U_n$, $\varepsilon_{i+2} = 1$. S'il existait une infinité des indices i, tels que $\varepsilon_{i+2} = 1$, et un seulement des points τ_{2i+1}, τ_{2i+2} appartenait à l'entourage U_n, on pourrait définir une fonction $x(t)$, $x(t) \neq 0$ dans Z, telle que $[\operatorname{sgn} x(\tau_{2i+1}) \cdot \operatorname{sgn} x_{2i+2})]^{\varepsilon_i+2} = -1$ pour une infinité des indices i, ce qui est en contradiction avec la convergence du produit infini dans (17). Par conséquent existe une suite infinie des nombres entiers positifs $2p_1 + 1$, $2p_1 + 2$, $2p_2 + 1$, $2p_2 + 2, \ldots$ telle que $\varepsilon_{p_i+2} = 1$, $\tau_{2p_i+1} \to t_0$, $\tau_{2p_i+2} \to t_0$.

Posons maintenant $t_n = \tau_n$, pour n ne figurant pas dans la suite définie $(n \geqslant 3)$ en conservant les exposants respectifs.

Parmi les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{p_1+2}$, il y a au moins deux égaux; désignons la valeur commune de ces nombres par β_{p_1+2}, et les points correspondants par t_{2p_1+1}, t_{2p_1+2}; ils restent encore deux de points $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_{2p_1+1}$; on les désigne par t_1, t_2, et les exposants β_1, β_2, sont égaux à ε_i correspondants, si $i = 1, 2, \ldots, p_1 + 2$, où à $3 - \varepsilon_0$, pour le point τ_0; nous posons enfin $t_{2p_i+1} = \tau_{2p_{i-1}+2}$, $t_{2p_i+2} = \tau_{2p_i+1}$ et $\beta_{p_i+2} = 1$, pour $i \geqslant 2$.

Il est à noter que tous les points ont conservés leurs exposants à l'exception du point τ_0, pour lequel nous avons changé l'éxposant ε_0 en $3 - \varepsilon$. Nous disons qu'on a avec les notations introduites la formule (16). Pour le démontrer considérons les produits:

$$P_n = \operatorname{sgn}^{\varepsilon_0} x(\tau_0) \cdot \operatorname{sgn}^{\varepsilon_1} x(\tau_1) \cdot \operatorname{sgn}^{\varepsilon_2} x(\tau_2) \cdot \prod_{i=1}^{n} [\operatorname{sgn} x(\tau_{2i+1}) \cdot \operatorname{sgn} x(\tau_{2i+2})]^{\varepsilon_{i+2}},$$

$$P'_n = \operatorname{sgn}^{\beta_1} x(t_1) \operatorname{sgn}^{\beta_2} x(t_2) \cdot \prod_{i=1}^{n} [\operatorname{sgn} x(t_{2i+1}) \operatorname{sgn} x(t_{2i+2})]^{\beta_{i+2}},$$

où $n \geqslant p_1$. Soit $k = k(n)$, le plus grand nombre tel que $p_k \leqslant n$. Il est alors $P_n \cdot P'_n = \operatorname{sgn} x(t_0) \cdot \operatorname{sgn} x(\tau_{2p_k+2})$. Mais pour $n \to \infty$, $k \to \infty$, donc $\tau_{2p_k+2} \to t_0$, et la fonction $x(t)$ étant continue et $x(t) \neq 0$ on a $P_n \cdot P'_n \to 1$, ce qui démontre le théorème. Ainsi la démonstration du théorème II est terminée.

Il est évident qu'on a aussi le théorème reciproque:

Théorème III. *Si* $S(x)$ *est défini par la formule* (16), *en admettant que l'expression du terme second est bien définie pour chaque fonction de* $\mathfrak{A}(E)$, *alors existe une fonctionnelle* $F \in \Phi$, *telle que* $S(x) = \operatorname{sgn} F(x)$.

Remarque. 1⁰ Il y a une différence essentielle entre les fonctionnelles, pour lesquels il est dans (16) $\beta_1 = \beta_2$ et celles pour lesquels on a $\beta_1 \neq \beta_2$. Les premières sont positives, les autres négatives pour la fonction identiquement égale à -1 dans Z.

2⁰ On pourrait rayer dans la formule (16) tous les facteurs pourvus de l'exposant *2*, si l'on demandait que la formule subsiste seulement pour les fonctions non nulles, dans un point de Z. Si elle doit rester vraie aussi pour les fonctions nulles dans quelque point de Z, on doit laisser tous les facteurs, parce que la présence d'un facteur nul est nécessaire, le produit des facteurs non nuls pouvant alors diverger.

12. Unicité de la représentation de la fonctionnelle.

Nous étudierons la question, si une fonctionnelle $F \in \Phi$ admet une représentation unique au moyen d'un ordonnement des éléments de l'ensemble Z, de la suite $\{\alpha_n\}$, (du théorème I) et de la suite $\{\beta_n\}$ du théorème II).

On tire de la définition de l'ensemble Z, que cet ensemble est determiné univoquement pour une fonctionnelle donnée F.

Supposons que $|F(x)|=\prod_{i=1}^{\infty}|x(\tau_i)|^{\alpha_i}=\prod_{i=1}^{\infty}|x(\tau_i')|^{\alpha_i'}$, où $\{z_n\}$ et $\{z_n'\}$ sont deux arrangements de l'ensemble Z, $\alpha_i>0$, $\alpha_i'>0$, $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i<\infty$, $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i'<\infty$. Il est évident que les arrangements $\{t_n\}$ et $\{t_n'\}$ peuvent être différents, parce que les produits infinis convergent absolument.

Nous montrérons que l'égalité $t_k=t_j'$ implique la relation $\alpha_k=\alpha_j'$.

Soit $Z^{(\gamma)}$ la dérivée d'ordre γ de l'ensemble Z, (γ un nombre ordinal, $Z^{(0)}=Z$). Mettons $Z_\gamma=Z^{(\gamma)}-Z^{(\gamma+1)}$. Soit ξ le plus petit nombre ordinal tel que il existe $t_k\in Z_\xi$, satisfaisant à $t_k=t_j'$ et $\alpha_k\neq\alpha_j'$. On peut trouver un entourage U du point t_k contenant (outre le point t_k) seulement ces points de l'ensemble Z qui appartiennent à un Z_η, où $\eta<\xi$. Prenons une fonction $x(t)$, telle que $0<x(t)<1$ dans U et $x(t)=1$ dans CU. Alors: $|F(x)|=\prod_{t_i\in U}|x(t_i)|^{\alpha_i}=\prod_{t_i'\in U}|x(t_i')|^{\alpha_i'}$, donc $|x(t_k)|^{\alpha_k}=|x(t_j')|^{\alpha_j'}$, et par conséquent $\alpha_k=\alpha_j'$ contrairement à l'hypothèse admise.

Nous avons donc prouvé que à chaque élément de Z correspond un exposant α bien determiné, indépendant de l'ordonnement de l'ensemble Z.

Supposons maintenant que:

$$\operatorname{Sgn} F(x)=\operatorname{sgn}^{\beta_1}x(t_1)\cdot\operatorname{sgn}^{\beta_2}x(t_2)\cdot\prod_{i=1}^{\infty}[\operatorname{sgn} x(t_{2i+1})\operatorname{sgn} x(t_{2i+2})]^{\beta_{i+2}}=$$

$$=\operatorname{sgn}^{\beta_1'}x(t_1)\operatorname{sgn}^{\beta_2'}(t_2)\cdot\prod_{i=1}^{\infty}[\operatorname{sgn} x(t_{2i+1})\cdot\operatorname{sgn} x(t_{2i+2})]^{\beta_{i+2}'}.$$

Nous admettons donc, que nous avons deux représentations de $\operatorname{sgn} F(x)$ avec le même ordonnement de Z.

Nous montrérons que $\beta_k=\beta_k'$ pour $k=1,2,3,\ldots$

Soit ξ le plus petit nombre ordinal de la propriété, qu'il existe un nombre k tel que $\beta_k\neq\beta_k'$ et β_k correspond à un point t_p, $t_p\in Z_\xi$.

Soit U un entourage du point t_p, défini comme dans le raisonnement précédent, avec une condition supplémentaire que $CU\cdot\overline{U}\cdot Z=0$. Prenons une fonction $x(t)$ telle que $x(t)<0$ dans U et $x(t)>0$ dans $C\overline{U}$. Par un raisonnement analogue au pré-

cédent on parvient à la conclusion que $\beta_k = \beta'_k$ contrairement à l'hypothèse admise.

Nous avons donc démontre que les exposants β_k sont bien determinés, si l'ordonnement de l'ensemble Z est donné.

Il est impossible de généraliser ce resultat, comme on voit de l'exemple suivant:

Nous prenons comme espace E le segment $\langle 0,1 \rangle$; comme l'ensemble Z on prend l'ensemble composé de points dont les abscisses sont: $0, 1, (\frac{1}{3})^n, 1-(\frac{1}{2})^n$, où $n = 1, 2, 3, \ldots$ Soit:

$$\operatorname{sgn} F(x) = \operatorname{sgn}^2 x(0) \cdot \operatorname{sgn}^2 x(1) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} [\operatorname{sgn} x((\tfrac{1}{3})^{2i-1}) \operatorname{sgn} x((\tfrac{1}{3})^{2i})] \cdot \\ \cdot [\operatorname{sgn} x(1-(\tfrac{1}{2})^{2i-1}) \cdot \operatorname{sgn} x(1-(\tfrac{1}{2})^{2i})].$$

Il est évident que cet produit infini est bien défini pour chaque fonction continue dans $\langle 0,1 \rangle$. Nous disons qu'il est:

$$\operatorname{sgn} F(x) = \operatorname{sgn} x(0) \cdot \operatorname{sgn} x(1) \cdot \operatorname{sgn} x(\tfrac{1}{3}) \cdot \operatorname{sgn} x(\tfrac{1}{2}) \cdot \\ \cdot \prod_{i=1}^{\infty} [\operatorname{sgn} x((\tfrac{1}{3})^{2i}) \cdot \operatorname{sgn} x((\tfrac{1}{3})^{2i+1}] \cdot \operatorname{sgn} x(1-(\tfrac{1}{2})^{2i}) \cdot \operatorname{sgn} x(1-(\tfrac{1}{2})^{2i+1})].$$

Aussi ce produit infini est bien défini pour chaque fonction continue dans $\langle 0,1 \rangle$. Pour établir l'égalité de deux expressions pour $\operatorname{sgn} F(x)$ désignons par $P_n(x)$ et $P'_n(x)$ les produits partiels obtenus en remplaçant la limite supérieure de la multiplication ∞ par n. On a pour $x(t) \neq 0$ dans Z:

$$P_n(x) \cdot P'_n(x) = \operatorname{sgn} x(0) \cdot \operatorname{sgn} x(1) \cdot \operatorname{sgn} x((\tfrac{1}{3})^{2n+1}) \cdot \operatorname{sgn} x(1-(\tfrac{1}{2})^{2n+1}).$$

La fonction $x(t)$ étant continue dans $\langle 0, 1 \rangle$ il est $P_n(x) \cdot P'_n(x) \to 1$, donc $P_n(x) = P'_n(x)$ pour des n assez grands, ce qu'il fallait démontrer.

Grâce à deux différents ordonnements des éléments de l'ensemble Z nous avons trouvé deux représentantions de $\operatorname{sgn} F(x)$, telles que aux points *0* et *1* correspondent une fois les exposants *1*, autre fois les exposants *2*.

13. La forme générale d'une fonctionnelle.

Les resultats trouvés sont résumés dans le théorème suivant:

Théorème IV. *Pour que $F \in \Phi$, il faut il suffit que* 1^0 *existe un ensemble Z, non vide, fini ou dénombrable et fermé, $Z \subset E$;* 2^0 *existe un arrangement des éléments de l'ensemble Z: $t_1, t_2, t_3, \ldots$;*

3° existe une suite $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$; *4° existe une suite* $\{\beta_n\}$, $\beta_n = 1$ *ou* $\beta_n = 2$ *tels que:*

$$F(x) = \prod_{i=1}^{\infty} |x(t_i)|^{\alpha_i} \cdot \operatorname{sgn}^{\beta_1} x(t_1) \cdot \operatorname{sgn}^{\beta_2} x(t_2) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} [\operatorname{sgn} x(t_{2i+1}) \cdot \operatorname{sgn} x(t_{2i+2})]^{\beta_{i+2}}$$

pour tous les $x \in \mathfrak{A}(E)$, *avec cette restriction, que si* Z *est un ensemble fini, on doit remplacer les deux produits infinis par les produits finis avec etant des facteurs, combien de points contient l'ensemble* Z; *le nombre* α_n *est detérminé univoquement par la fonctionnelle* F *et le point* t_n, *le nombre* β_n *est determiné univoquement par la fonctionnelle* F. *le point* t_n *et l'arrangement de l'ensemble* Z *en la suite* $\{t_n\}$.

SUR L'UNICITÉ DES INTÉGRALES DE L'ÉQUATION DE CLAIRAUT, MODIFIÉE

Par T. Ważewski et J. Szarski (Kraków)

Considérons l'équation différentielle ordinaire de la forme:

(1) $$y' = f(x, y)$$

et supposons que la fonction $f(x,y)$ soit continue dans un rectangle:

(2) $$|x - x_0| < a; \quad |y - y_0| < b.$$

Une équation de la forme (1), définie dans un rectangle (2), sera appelée *l'équation de Clairaut, modifiée*, si par tout point du rectangle (2) il passe une droite dont la partie commune avec le rectangle (2) est l'intégrale de cette équation. Une telle droite sera appelée *droite-intégrale*.

Nous allons démontrer le théorème suivant sui les éouations de cette espèce.

Théorème. Une équation de Clairaut, modifiée ne possède, dans *le rectangle* où elle est définie, d'autres intégrales que ses droites-intégrales.

Démonstration[1]). Remarquons d'abord que deux intégrales de l'équations (1) issues d'un point P du rectangle (2) ont forcément la même tangente en ce point. Il en résulte que deux droites-intégrales de l'équation (1) ne peuvent pas se couper en un point du rectangle (2).

Pour démontrer notre théorème il suffit de prouver que si P est un point quelconque du rectangle (2), alors toute intégrale

---

[1]) La démonstration que nous présentons est de caractère géométrique. Une autre démonstration de caractère analytique, mais un peu plus compliquée, a été donnée d'abord par M. Ważewski.

issue de ce point est identique à la droite-intégrale passant par ce point.

Supposons, par impossible, qu'il n'en soit pas ainsi pour un point P du rectangle (2). Il existerait alors une intégrale I issue de ce point qui ne serait pas identique à la droite-intégrale p passant par ce point. Il existerait donc un point Q de l'intégrale I qui ne serait pas situé sur la droite p. Supposons, pour fixer l'attention, que Q soit situé à droite du point P et au-dessus de p [2]). Nous pouvons supposer en plus que la portion de I entre le point P et Q soit située au-dessus de la droite p. Dans le cas contraire, on remplacerait le point P par le point P' en lequel l'intégrale I envisagée à gauche de Q coupe la droite p pour la première fois. Soit l la droite joignant les points P et Q. Cette droite est évidemment différente de la droite p et la coupe en P. Il existe sur la droite l un point R (qui peut d'ailleurs coïncider avec Q) différent de P et tel que la portion de I entre les points P et R est située au-dessous de la droite l. Ceci est évident, puisque autrement il existerait sur I une suite de points situés au-dessus ou sur la droite l et convergeant vers P et la tangente à I en P serait par conséquent différente de la droite-intégrale p, ce qui est impossible d'après la remarque au début de la démonstration.

En vertu du théorème de LAGRANGE il existe, sur la portion de I entre P et R, un point S tel que la tangente à I en ce point est parallèle à la droite l. Cette tangente t est évidemment la droite-intégrale passant par S et coupe la droite p en un point T dont l'abscisse est supérieure à celle du point P et inférieure à celle du point Q (puisque le point S est situé au-dessous de l et au-dessus de p). Le point T appartient par conséquent au rectangle (2). Nous sommes ainsi conduits à la conclusion que le point d'intersection de deux droites-intégrales p et t appartient au rectangle (2), ce qui est impossible, comme nous l'avons remarqué au début de la démonstration. Notre théorème est ainsi démontré.

---

[2]) On démontre d'une façon analogue que d'autres cas qui peuvent se présenter (Q à gauche de P et au-dessus de p, ainsi que Q au-dessous de p et à gauche ou bien à droite de P) conduisent à la contradiction.

Interprétation géométrique.

Du point de vue géométrique le résultat que nous venons d'obtenir peut être formulé sous la forme suivante:

Si une famille de droites dans *le plan* jouit de la propriété que par chaque point d'un rectangle il passe une seule droite de la famille, alors cette famille n'admet pas d'enveloppe dans *ce rectangle.*

Remarque. Considérons une équation de CLAIRAUT c. à. d. l'équation de la forme:

(3) $$y = xy' + g(y').$$

On sait que pour tout c pour lequel la fonction $g(t)$ est définie la droite de la forme:

(4) $$y = cx + g(c)$$

est une intégrale de l'équation (3).

Supposons que dans un rectangle (2) l'équation (3) se laisse écrire sous la forme (1). Ceci étant, il résulte de notre théorème que l'équation (3) n'adment pas d'autres intégrales dans *le rectangle* (2) que les segments des droites (4) situés dans ce rectangle.

Problème dans l'espace à trois dimensions.

Il se pose le problème suivant:

Considérons le système de deux équations ordinaires:

(5) $$y' = f(x, y, z), \quad z' = g(x, y, z).$$

Supposons que les fonctions $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$ soient continues dans un parallélépipède:

(6) $$|x - x_0| < a; \quad |y - y_0| < b; \quad |z - z_0| < c$$

et que par chaque point de cet ensemble il passe une droite dont le segment situé dans cet ensemble soit l'intégrale du système (5).

Est-ce qu'il existe alors, dans le parallélépipède (6), une intégrale de (5) qui ne soit pas identique à un de ces segments?

On peut formuler un problème géométrique analogue sous la forme suivante: Supposons qu'on ait dans l'espace à trois dimensions deux domaines plans, homéomorphes, situés respectivement sur deux plans Π_1 et Π_2 horizontaux à l'axe x. Joignons les points homologues de ces domaines par des segments rectilinéaires et supposons que deux segments différents ne se coupent jamais en un point situé entre les plans Π_1 et Π_2. Est-ce qu'il existe alors une courbe située dans l'ensemble composé des points de ces segments qui soit tangente en chaque point au segment passant par ce point et qui ne soit pas, elle-même, identique à un de ces segments?

SUR UNE PROPRIÉTÉ ASYMPTOTIQUE DES INTÉGRALES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Par J. Szarski (Kraków)

I. Considérons le système d'équations différentielles ordinaires:

$$(1) \qquad y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Soit E un ensemble dans l'espace de points $(x, y_1, \ldots, y_n)$ à $(n+1)$ dimensions tel que:

1^0. La projection de l'ensemble E sur l'axe x est l'intervalle:

$$(2) \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$$

2^0. Toute section de l'ensemble E par un plan $x = a$ quelconque $(a \geqslant 0)$ est un continu borné et possédant des points intérieurs.

3^0. Toute portion de l'ensemble E entre deux plans $x = a_1$ et $x = a_2$ quelconques est fermée et bornée.

Supposons que les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ soient continues dans un ensemble ouvert Ω contenant l'ensemble E et que les intégrales du système (1) jouissent de la propriété suivante:

(a) Si $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$, où $\overline{x} > 0$, est un point appartenant à la frontière de l'ensemble E, alors pour toute intégrale du système (1) issue du point $\overline{P}$ il existe un nombre positif h, tel que l'intégrale envisagée dans l'intérvalle $(\overline{x} - h, \overline{x})$ est située à l'intérieur de E et envisagée dans l'intervalle $(\overline{x}, \overline{x} + h)$ elle est située à l'extérieur de E.

Ceci étant supposé on a le théorème suivant:

L'ensemble F de points P appartenant à la section de l'ensemble E par le plan $x=0$, et tels qu'il existe une intégrale du système (1) *issue du point P, définie dans l'intervalle* (2) *et située dans l'ensemble E, est un continu ou bien se réduit à un seul point.*

Nous allons démontrer ce théorème dans le cas ou la frontière de l'ensemble E est une surface de révolution. Nous n'envisageons ce cas particulier que pour fixer l'attention.

II. Nous adoptons des hypothèses suivantes:

Hypothèses H. Supposons que les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ soient continues dans un ensemble ouvert Ω contenant l'ensemble défini par les inégalités:

$$(3) \qquad 0 \leqslant x < +\infty; \quad \sum_{j=1}^{n} (y_j)^2 \leqslant [\gamma(x)]^2$$

où la fonction $\gamma(x)$ est positive et dérivable dans l'intervalle (2) [1]).

Supposons en plus que pour tout point de la surface:

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{n} (y_j)^2 = [\gamma(x)]^2,$$

on ait l'inégalité:

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot f_j(x, y_1, \ldots, y_n) > \gamma(x) \cdot \gamma'(x) \text{ [2]}).$$

III. Désignons par S_ν la section de l'ensemble (3) par le plan $x=\nu$, c. à. d. l'ensemble défini par les relations:

$$(6) \qquad x=\nu; \quad \sum_{j=1}^{n} (y_j)^2 \leqslant [\gamma(x)]^2 \qquad (S_\nu)$$

et soit F l'ensemble de points P appartenant à la section S_0 et tels qu'il existe une intégrale du système (1) issue du point P, définie dans l'intervalle (2) et située dans l'ensemble (3).

---

[1]) On voit aisément que l'ensemble (3) satisfait aux hypothèses 1°, 2°, 3° (cf. l'alinéa I).

[2]) Le sens géométrique de l'inégalité (5) est (comme il apparaîtra plus loin) que les intégrales du système (1) jouissent de la propriété (α) (cf. l'alinéa I) par rapport à l'ensemble (3).

Théorème.

Les hypothèses H étant remplies, l'ensemble F est un continu ou bien se réduit à un seul point.

Nous allons effectuer la démonstration de notre théorème en démontrant les deux propositions suivantes:

Dans les hypothèses H:

(β) Toute intégrale du système (1) issue d'un point appartenant à l'ensemble (3) et prolongée à gauche du point initial est située dans l'ensemble (3) jusqu'à ce qu'elle coupe la section S_0.

(γ) Pour tout ν, l'ensemble F_ν de points de la section S_0 situés sur des intégrales du système (1) issues des points de la section S_ν, est non-vide, fermé et connexe.

Nous terminerons ensuite la démonstration en prouvant que:

$$F = \prod_{\nu=0}^{\infty} F_\nu . \tag{7}$$

IV. Démonstration.

Ad. (β). Nous démontrerons d'abord que, dans les hypothèses H, les intégrales du système (1) jouissent de la propriété (α) (cf. l'alinéa I) par rapport à l'ensemble (3).

Soit, en effet, $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n)$, où $\overline{x} > 0$, un point de la frontière de l'ensemble (3), c. à. d.:

$$\overline{x} > 0 ; \quad \sum_{j=1}^{n} (\overline{y}_j)^2 = [\gamma(\overline{x})]^2 . \tag{8}$$

Soit $y_i = y_i(x)$ une intégrale quelconque du système (1) issue du point $\overline{P}$, c. à. d. remplissant les égalités:

$$y_i(\overline{x}) = \overline{y}_i \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{9}$$

En vertu des hypothèses H et des relations (8) et (9), nous avons:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=1}^{n} (y_j(x))^2 - (\gamma(x))^2\right]_{x=\overline{x}} > 0 . \tag{10}$$

Il s'ensuit qu'il existe un nombre positif h tel que:

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j(x))^2 < [\gamma(x)]^2 \quad \text{pour} \quad \overline{x} - h < x < \overline{x}. \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j(x))^2 > [\gamma(x)]^2 \quad \text{pour} \quad \overline{x} < x < \overline{x} + h. \tag{12}$$

Ceci prouve que la condition (α) est remplie par rapport à l'ensemble (3).

De la propriété (α) qui vient d'être établie il résulte immédiatement que toute intégrale du système (1) issue d'un point $P(x, y_1, \ldots, y_n)$, (où $x > 0$), appartenant à l'ensemble (3) et envisagée dans un voisinage suffisamment petit à gauche du point initial est située à l'intérieur de l'ensemble (3).

Supposons maintenant que la proposition (β) ne soit pas vraie pour un point $\widetilde{P}(\widetilde{x}, \widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n)$ appartenant à l'ensemble (3) et pour une intégrale $y_i = \widetilde{y}_i(x)$ issue de ce point. Mais puisque toute intégrale du système (1) issue d'un point de l'ensemble (3) se laisse prolonger à gauche du point initial jusqu'à la frontière de l'ensemble (3)[3]), il en résulterait que l'intégrale $\widetilde{y}_i(x)$ coupe la surface (4) en un point à gauche du point $\widetilde{P}$. Soit alors $\widetilde{\widetilde{x}}$ le premier point x à gauche de $\widetilde{x}$ tel que:

$$\sum_{j=1}^{n} (\widetilde{y}_j(\widetilde{\widetilde{x}}))^2 = [\gamma(\widetilde{\widetilde{x}})]^2. \tag{13}$$

Nous avons évidemment:

$$\widetilde{\widetilde{x}} > 0 \tag{14}$$

puisque autrement la proposition (β) serait vraie pour l'intégrale $\widetilde{y}_i(x)$. D'autres part, d'après la définition de $\widetilde{\widetilde{x}}$, on a:

$$\sum_{j=1}^{n} (\widetilde{y}_j(x))^2 < [\gamma(x)]^2 \quad \text{pour} \quad \widetilde{\widetilde{x}} < x < \widetilde{x}. \tag{15}$$

Les relation (13), (14) et (15) étant en contradiction avec la propriété (α), la proposition (β) est donc démontrée.

Ad. (γ).

§ 1. En vertu de la proposition (β) l'ensemble F_ν est non-vide. Nous démontrerons maintenant qu'il est fermé.

Soit, en effet, P_μ ($\mu = 1, 2, \ldots$) une suite de points appartenant à F_ν, convergeant vers un point P^0. Le point P^0 est évidemment situé sur la section S_0. Il suffit donc de prouver qu'il existe une intégrale du système (1) issue de P^0 et coupant la section S_ν.

---

[3]) E. Kamke: *Differentialgleichungen reeller Funktionen.* Leipzig 1930, p. 135, Satz 2.

Or, d'après la définition de l'ensemble F_ν (cf. l'alinéa III, (γ)), il existe pour tout point P_μ une intégrale $y_i = y_i^\mu(x)$ issue d'un point de la section S_ν, coupant la section S_0 au point P_μ et située (en vertu de la proposition (β)) dans l'ensemble (3) pour $0 \leqslant x \leqslant \nu$. La portion de l'ensemble (3) entre les sections S_0 et S_ν étant fermée et bornée et toutes les intégrales $y_i = y_i^\mu(x)$ étant situées, pour $0 \leqslant x \leqslant \nu$, dans cette portion, on peut extraire[4]) de la suite $y_i^\mu(x)$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ une suite convergeant vers une intégrale $y_i = y_i^0(x)$ qui est située dans l'ensemble (3) pour $0 \leqslant x \leqslant \nu$, coupe la section S_ν et rencontre la section S_0 en point limite de la suite P_μ c. à. d. en point P^0. Cela prouve, d'après la définition de l'ensemble F_ν (cf. l'alinéa III, (γ)), que P^0 appartient à F_ν, donc F_ν est fermé.

§ 2. Pour simplifier l'énoncé d'un lemme que nous allons démontrer tout à l'heure, nous introduirons la définition suivante:

Définition. Nous dirons que deux ensembles G_1 et G_2 se laissent joindre dans l'ensemble G par une chaîne finie à l'écart ε (où $\varepsilon > 0$), si, pour chaque couple de points P_1 et P_2 dont l'un appartient à G_1 et l'autre à G_2, il existe une suite finie de points appartenant à G telle que P_1 en soit le premier et P_2 le dernier terme et que la distance de deux points consécutifs soit inférieure à ε.

Désignons par G_Q^ν l'ensemble de points de la section S_0 situés sur des intégrales issues du point Q appartenant à S_ν.

Nous démontrerons à présent le lemme suivant:

Lemme. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que lorsque $\overline{Q}$ et $\overline{\overline{Q}}$ appartiennent à S_ν et:

$$(16) \qquad \varrho(\overline{Q}, \overline{\overline{Q}}) < \delta \text{ [5])}$$

alors les ensembles $G_{\overline{Q}}^\nu$ et $G_{\overline{\overline{Q}}}^\nu$ se laissent joindre dans l'ensemble F_ν par une chaîne finie à l'écart ε.

---

4) On a en effet: $y_i^\mu(x) = y_i^\mu(0) + \int_0^x f_i(x, y_i^\mu(x), \ldots, y_n^\mu(x))\, dx$, pour $0 \leqslant x \leqslant \nu$. Les fonctions f_i étant bornées dans la portion de l'ensemble (3) entre les sections S_0 et S_ν, il en résulte que les fonctions de la suite $y_i^\mu(x)$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ sont également continues dans l'intervalle $[0, \nu]$. Ceci permet d'extraire de la suite $y_i^\mu(x)$ une suite convergeant dans $[0, \nu]$ vers une intégrale de (1).

5) $\varrho(\overline{Q}, \overline{\overline{Q}})$ désigne la distance des points $\overline{Q}$ et $\overline{\overline{Q}}$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites Q^1_μ et Q^2_μ, $(\mu = 1, 2, \ldots)$, de points de la section S_ν telles que:

$$\lim_{\mu\to\infty} Q^1_\mu = \lim_{\mu\to\infty} Q^2_\mu = Q^0. \tag{17}$$

(Q^0 étant un certain point de la section S_ν), et que les ensembles $G^\nu_{Q^1_\mu}$ et $G^\nu_{Q^2_\mu}$ ne se laissent pas joindre dans F_ν par une chaîne finie à l'écart ε_0. Soient alors C^1_μ et C^2_μ, $(\mu = 1, 2, \ldots)$, deux intégrales du système (1) issues respectivement des points Q^1_μ et Q^2_μ. Désignons par P^1_μ et P^2_μ leurs point d'intersection avec S_0 (cf. la proposition (β)). On a d'après la définition des ensembles G^ν_Q:

$$P^1_\mu \in G^\nu_{Q^1_\mu}; \quad P^2_\mu \in G^\nu_{Q^2_\mu} \text{ [6]}). \tag{18}$$

Les intégrales C^1_μ et C^2_μ étant situées, pour $0 \leqslant x \leqslant \nu$, dans la portion de l'ensemble (3) entre S_0 et S_ν (cf. la proposition (β)), nous pouvons supposer (cf. note [3])), en prenant au besoin deux suites partielles et en les désignant encore par C^1_μ et C^2_μ, qu'on ait:

$$\lim_{\mu\to\infty} C^1_\mu = C^1 \tag{19}$$

$$\lim_{\mu\to\infty} C^2_\mu = C^2 \tag{20}$$

où C^1 et C^2 sont deux intégrales du système (1) issue (en vertu de (17)) du point Q^0. Soient P^1 et P^2 leurs points d'intersection avec S_0 (cf. la prop. (β)). On a évidemment:

$$P^1 \in G^\nu_{Q^0}; \quad P^2 \in G^\nu_{Q^0}. \tag{21}$$

$$\lim_{\mu\to\infty} P^1_\mu = P^1; \quad \lim_{\mu\to\infty} P^2_\mu = P^2. \tag{22}$$

Des relations (22), il résulte que pour un $\bar{\mu}$ suffisamment grand on a:

$$\varrho(P^1_{\bar{\mu}}, P^1) < \varepsilon_0; \quad \varrho(P^2_{\bar{\mu}}, P^2) < \varepsilon_0. \tag{23}$$

Tout ensemble G^ν_Q étant, d'après le théorème de M. Kneser, fermé et connexe, il résulte de (21) que les points P^1 et P^2 se laissent joindre par une chaîne finie à l'écart ε_0, de points

[6]) $P \in G$ veut dire que P fait partie de l'ensemble G.

appartenant à $G^{\nu}_{Q^0}$. De même, tout point de l'ensemble $G^{\nu}_{Q^{\frac{1}{\mu}}}$ se laisse joindre avec le point $P^{\frac{1}{\mu}}$ par une chaîne analogue de points appartenant à $G^{\nu}_{Q^{\frac{1}{\mu}}}$ et tout point de l'ensemble $G^{\nu}_{Q^{\frac{2}{\mu}}}$ se laisse joindre avec le point $P^{\frac{1}{\mu}}$ par une chaîne analogue de points appartenant à $G^{\nu}_{Q^{\frac{1}{\mu}}}$. Il s'ensuit, en vertu des inégalités (23), que tout point de l'ensemble $G^{\nu}_{Q^{\frac{1}{\mu}}}$ se laisse joindre avec tout point de l'ensemble $G^{\nu}_{Q^{\frac{2}{\mu}}}$ par une chaîne finie à l'écart ε_0, de points de l'ensemble $G^{\nu}_{Q^{\frac{1}{\mu}}}+G^{\nu}_{Q^0}+G^{\nu}_{Q^{\frac{2}{\mu}}}$ qui est évidemment contenu dans F_ν. Ce résultat se trouvant en contradiction avec la supposition faite au début de la démonstration, le lemme est ainsi démontré.

§ 3. Pour démontrer que l'ensemble F_ν est connexe il suffit de prouver que, pour $\varepsilon>0$ donné d'avance, chaque couple de points P' et P'' de l'ensemble F_ν se laisse joindre par une chaîne finie à l'écart ε_0, de points appartenant à F_ν.

En effet, désignons par Q' et Q'' les points de la section S_ν situés sur deux intégrales issues respectivement de P' et de P'' (cf. la déf. de l'ensemble F_ν). Soit $\delta>0$, un nombre correspondant à ε, en vertu du lemme. L'ensemble S_ν étant évidemment fermé et connexe il existe une suite finie $Q', Q_1, \ldots, Q_\varkappa, Q''$ de points appartenant à S_ν, telle que la distance de deux points consécutifs est inférieure à δ. Il résulte alors du lemme que deux ensembles consécutifs de la suite:

(24) $$G^{\nu}_{Q'}, G^{\nu}_{Q_1}, \ldots, G^{\eta}_{Q_\varkappa}, G^{\nu}_{Q''}$$

se laissent joindre dans F_ν par une chaîne finie à l'écart ε. Il existe donc en particulier pour les points P' et P'' (ces points appartenant respectivement à $G^{\nu}_{Q'}$ et $G^{\nu}_{Q''}$) une chaîne dont il fallait démontrer l'existence.

§ 4. La suite d'ensemble F_ν étant évidemment décroissante et F_ν étant (comme nous venons de le démontrer) non-vide, fermé, borné et connexe, il s'ensuit que l'ensemble $\prod_{\nu=0}^{\infty} F_\nu$ est un continu ou bien se réduit à un seul point.

Nous avons évidemment:

(25) $$F \subset \prod_{\nu=\infty}^{\infty} F_\nu.$$

Pour terminer la démonstration de notre théorème il reste donc à prouver que:

(26) $$\prod_{\nu=0}^{\infty} F_\nu \subset F.$$

Soit, à cet effet, P un point quelconque de l'ensemble $\prod_{\nu=0}^{\infty} F_\nu$. Puisque P appartient, par hypothèse, à tous les F_ν, il existe une suite d'intégrales C^ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) issues de ce point, telles que l'intégrale C^ν est définie dans l'intervalle $[0, \nu]$ et située dans l'ensemble (3) pour $0 \leqslant x \leqslant \nu$.

Nous construirons une suite partielle C^{α_ν} par la méthode diagonale de la façon suivante:

Nous posons $C^{\alpha_1} = C^1$. De la suite $(C^2, C^3, \ldots)$ on peut extraire (cf. note [3]) une suite partielle C^{β_ν} convergeant dans l'intervalle $[0, 2]$ vers une intégrale issue du point P et située dans l'ensemble (3) pour $0 \leqslant x \leqslant 2$. Nous posons $C^{\alpha_2} = C^{\beta_1}$. Nous extrayons ensuite de $(C^{\beta_2}, C^{\beta_3}, \ldots)$ une suite partielle $C^{\beta_{\gamma_\nu}}$ convergeant dans l'intervalle $[0, 3]$ vers une intégrale issue du point P et située dans l'ensemble (3) pour $0 \leqslant x \leqslant 3$, et nous posons $C^{\alpha_3} = C^{\beta_{\gamma_1}}$. Les intégrales limites des suites $(C^{\beta_1}, C^{\beta_2}, \ldots)$ et $(C^{\beta_{\gamma_1}}, C^{\beta_{\gamma_2}}, \ldots)$ sont évidemment identiques dans l'intervalle $[0, 2]$.

En répétant ce procédé une infinité dénombrable de fois nous aboutirons à une suite partielle C^{α_ν} convergeant dans l'intervalle (2) vers une intégrale issue du point P et située dans l'ensemble (3) pour tout x appartenant à l'intervalle (2). Cela prouve que $P \in F$, ce qui termine la démonstration de l'inclusion (26).

SUR UN PROBLÈME D'INTERPOLATION RELATIF AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Par M. Biernacki (Lublin)

§ 1. Je me propose d'étudier dans ce travail le problème suivant: Etant donnée une équation différentielle linéaire et homogène à coëfficients constants:

$$(1) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0\, y = 0$$

reconnaitre, d'après les racines de son équation caractéristique:

$$(2) \qquad S^n + a_{n-1}\, S^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

s'il existe toujours une intégrale de (1) qui prend en k points arbitraires ($1 \leqslant k \leqslant n$) des valeurs également arbitraires. S'il en est ainsi je dirai que l'équation (1) est du type L_k (l'équation $y^{(n)} = 0$ est du type L_n d'après la formule d'interpolation de Lagrange), dans le cas contraire je dirai que l'équation (1) est du type S_k. On sait que toute équation (1) est du type L_1. Je résous complétement la question dans les cas $k = 2$ et $k = n$: pour que l'équation (1) soit du type S_2 il faut et il suffit que toutes les racines de (2) soient simples, qu'elles aient toutes la même partie réelle et que les rapports des leurs parties imaginaires soient tous rationnels (l'énoncé II); pour que l'équation (1) soit du type L_n il faut et il suffit que toutes les racines de l'équation caractéristique soient réelles (l'énoncé III). La plus grande partie du travail est consacrée à l'étude du cas $k = n - 1$. J'ai reconnu que l'équation (1) est du type S_{n-1} dans les deux cas suivants:

1⁰) l'équation (2) possède au moins deux couples des racines complexes telles que le rapport des leurs parties imaginaires est rationnel (cas particulier de l'énoncé XII du § 12);

2⁰) l'équation (2) possède au moins deux couples des racines complexes, toutes les racines de cette équation sont simples et les parties réelles de tous les couples des racines complexes sont distinctes entre elles (l'énoncé IX du § 10).

J'ai d'ailleurs formé, pour tout $n>3$, des équations (1) dont les équations caractéristiques possèdent un seul couple des racines complexes et qui sont du type S_{n-1} (l'énoncé XI du § 11). Ces résultats rendent probable l'énoncé suivant „lorsque $n>4$ la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit du type L_{n-1} est que toutes les racines de l'équation (2) soient réelles". Au contraire, lorsque $n=4$ l'équation (1) peut être du type L_3 ou du type S_3 suivant la situation des racines (cf. § 11).

Dans la dernière partie du travail je suppose que k est quelconque et j'obtiens alors quelques résultats particuliers (les énoncés XII, XIII, XIV et XV). Il est possible que l'hypothèse qui vient d'être citée se généralise de la manière suivante: „pour tout entier p il existe un entier $n_0=n_0(p)$ tel que, lorsque $n>n_0$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit du type L_{n-p} est que $(n-p)$ racines de l'équation (2) soient réelles".

Remarquons enfin qu'il existe toujours une intégrale de (1) non identiquement nulle et qui s'annule en $(n-1)$ points arbitraires, si donc (1) est du type L_k et si $k\leqslant n-1$ il y a une infinité des intégrales qui prennent en k points des valeurs données[1]).

---

[1]) J. Mikusiński a obtenu des résultats relatifs à un problème d'interpolation plus général dans lequel interviennent les valeurs des dérivées des intégrales. Par exemple, lorsque dans l'équation $y^{(n)}+A(x)=0$ on a $A(x)\geqslant 0$ il est possible de choisir arbitrairement p_1 termes de la suite $y(x_1), y'(x_1)\dots y^{(n-1)}(x_1)$ et p_2 termes de la suite $y(x_2), y'(x_2)\dots y^{(n-1)}(x_2)$ pourvu que $p_1+p_2=n$ et que p_2 soit pair. Lorsque $A(x)\leqslant 0$ on a le même énoncé pourvu que p_2 soit impair. (On exclu ici le cas bien connu où $p_2=0$ où $p_2=n$ et on suppose que $A(x)$ ne s'annule pas identiquement). Cf. le travail de M. Mikusiński, *Sur le problème d'interpolation du intégrales des équations différentielles linéaires*, publié dans les „Annales de la Soc. Polon. de Mathém." **19** (1946).

§ 2. Nous commencerons par établir un critère général relatif à l'équation

$$(1') \qquad y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\, y = 0$$

a coefficients variables:

I. *Soit* $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ *un système fondamental des intégrales de l'équation* (1′) *dans laquelle on suppose les coefficients* $a_i(x)$ *continus. Pour que cette équation soit du type* S_k *il faut et il suffit qu'il existe* k *constantes* $k_1, k_2 \dots k_k$ *non toutes nulles et* k *nombres* $x_1, x_2 \dots x_k (x_i \neq x_j)$ *tels que les* n *équations*

$$(3) \qquad k_1 y_i(x_1) + k_2 y_i(x_2) + \dots + k_k y_i(x_k) = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

soient remplies[2]).

La condition est *suffisante*, car si elle est remplie toute intégrale $y(x)$ de (1′) satisfait à l'égalité:

$$k_1 y(x_1) + k_2 y(x_2) + \dots + k_k y(x_k) = 0$$

donc les valeurs de $y(x)$ aux points $x_1, x_2, \dots, x_k$ ne sont pas arbitraires.

Nous allons maintenant voir que la condition est *nécessaire*. Les valeurs d'une intégrale quelconque aux points $x_1, x_2, \dots, x_k$ sont données par les formules:

$$Y_1 = C_1 y_1(x_1) + \dots + C_n y_n(x_1)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$Y_k = C_1 y_1(x_k) + \dots + C_n y_n(x_k)$$

où $C_1, C_2, \dots C_n$ sont des constantes arbitraires. Lorsque ces constantes varient le point $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ décrit une variété linéaire dans l'espace des variables $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$. En effet, si aux systèmes $C'_1, \dots, C'_n$ et $C^2_1, \dots, C^2_n$ des valeurs des constantes C_i correspondent des points $(Y'_1, \dots, Y'_n)$ et $(Y^2_1, \dots, Y^2_n)$ respectivement, au système $pC'_1 + qC^2_1, \dots, pC^1_n + qC^2_n$ (p, q réels) correspond le point $(pY'_1 + qY^2_1, \dots, pY'_n + qY^1_n)$. D'après l'hypothèse cette variété linéaire ne comprend pas tout l'espace, et en annulant les constantes C_i on voit qu'elle passe par l'ori-

[2]) Nous supposons que les coefficients $a_i(x)$ et les intégrales $y_i(x)$ sont réelles et qu'il en est de même avec les nombres k_i et x_i.

gine. Il existent donc des constantes $k_1, k_2, \ldots, k_k$ non toutes nulles telles que l'on a toujours

$$k_1 Y_1 + k_2 Y_2 + \ldots + k_k Y_k = 0.$$

En posant maintenant $C_i = 1$ et $C_1 = 0$, $C_2 = 0, \ldots, C_{i-1} = 0$, $C_{i+1} = 0, \ldots, C_n = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on obtient bien les conditions (3).

Supposons maintenant que les coefficients soient constants. De l'énoncé I il résulte aisément que si l'on multiplie toutes les racines de l'équation caractéristique par la même constante réelle le type de l'équation ne change pas. En particulier on peut, sans changer le type, remplacer le système des racines par son symétrique par rapport à l'axe imaginaire, il suffit alors de changer dans (3) tous les x_i en $-x_i$. Enfin, la transformation $y = e^{\alpha x} z$ (α réel) montre que le type ne change pas lorsque on ajoute à toutes les racines de l'équation caractéristique la même constante réelle. Nous dirons pour abréger que l'une quelconque des transformations précédentes (multiplication par une constante réelle ou l'addition d'une telle constante) ou bien leur combinaison constitue *une transformation T*. Il est clair aussi que l'on peut ajouter à tous les x_i la même constante réelle, on peut donc supposer que l'un des nombres x_i a une valeur arbitraire.

§ 3. Nous supposerons dans ce § que $k = 2$. D'après l'énoncé I pour que l'équation (1) soit du type S_2 il faut et il suffit qu'il existent des constantes k_1 et k_2 non toutes nulles et de nombres x_1 et x_2 tels que l'on ait: $k_1 y_i(x_1) + k_2 y_i(x_2) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $y_i(x)$ étant un système des intégrales fondamentales. Remarquons d'abord qu'*aucun* des nombres k_1 et k_2 ne peut être nul, car si l'on avait $k_2 = 0$ par exemple, on aurait des inégalités comme $e^{\gamma x_1} = 0$ ou bien $e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 = 0$ et $e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1 = 0$, ce qui est impossible. On voit en outre que l'on a

$$\begin{vmatrix} y_i(x_1) & y_i(x_1) \\ y_s(x_2) & y_s(x_2) \end{vmatrix} = 0$$

quelques soient les entiers i et s $(i, s = 1, 2, \ldots, n)$. Il en résulte d'abord que *toutes les racines de l'équation* (2) *sont simples*. En effet, si par exemple γ est la racine double, on trouve

en posant $y_1(x) = e^{\gamma x}$ et $y_2(x) = xe^{\gamma x}$ que $x_1 = x_2$, contrairement à l'hypothèse. Lorsque $\alpha + i\beta$ est une racine multiple de (2) on devrait avoir

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x_1}\cos\beta x_1 & e^{\alpha x_2}\cos\beta x_2 \\ x_1 e^{\alpha x_1}\cos\beta x_1 & x_2 e^{\alpha x_2}\cos\beta x_2 \end{vmatrix} = 0$$

et une égalité analogue dans laquelle cos est remplacé par sin, d'où puisque $x_1 \neq x_2$ $\cos\beta x_1 \cdot \cos\beta x_2 = 0$ et $\sin\beta x_1 \cdot \sin\beta x_2 = 0$, il en résulte, par exemple, $\cos\beta x_1 = 0$ et $\sin\beta x_2 = 0$. De l'égalité $k_1 e^{\alpha x_1}\cos\beta x_1 + k_2 e^{\alpha x_2}\cos\beta x_2 = 0$ on déduit alors, puisque $k_1 \neq 0$ et $k_2 \neq 0$ que $\cos\beta x_2 = 0$, ce qui n'est pas possible. Supposons maintenant que l'équation (2) possède des racines $\alpha \pm i\beta$. On a

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x_1}\cos\beta x_1 & e^{\alpha x_2}\cos\beta x_2 \\ e^{\alpha x_1}\sin\beta x_1 & e^{\alpha x_2}\sin\beta x_2 \end{vmatrix} = 0$$

d'où il résulte, en posant $\varepsilon = \pm 1$, que l'on a $\cos\beta x_2 = \varepsilon\cos\beta x_1$ et $\sin\beta x_2 = \varepsilon\sin\beta x_1$, donc les égalités $k_1 e^{\alpha x_1}\cos\beta x_1 + k_2 e^{\alpha x_2}\cos\beta x_2 = 0$ et $k_1 e^{\alpha x_1}\sin\beta x_1 + k_2 e^{\alpha x_2}\sin\beta x_2 = 0$ fournissent la relation $e^{\alpha(x_1 - x_2)} = -\varepsilon k_2 k_1^{-1}$. Il en résulte que k_1 et k_2 étant donnés ε et α sont entièrement determinés. Donc, *toutes les racines de* (2) *ont la même partie réelle.* D'après ce qui précède on a, $\operatorname{tg}\beta x_2 = \operatorname{tg}\beta x_1$, donc, en supposant que $\beta > 0$, $x_2 - x_1 = \lambda\pi\beta^{-1}$, λ étant un entier. En désignant donc par $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ les parties imaginaires des racines de (2) on a donc $\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 \ldots = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 \ldots$, en d'autres termes *les rapports des coefficients de i des racines complexes de* (2) *sont tous rationnels.*

Supposons remplies toutes les conditions précedentes. D'après la remarque finale du § 2 on peut poser $x_1 = 0$ nous poserons d'autre part $x_2 = 2\lambda_s\pi\beta_s^{-1}$, les λ_s étant des entiers qui viennent d'être définis (nous venons de voir que le rapport $\lambda_s\beta_s^{-1}$ ne dépend pas de s). On constate sans peine que dans ces conditions toutes les équations $k_1 y_i(x_1) + k_2 y_i(x_2) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ se réduisent à $k_1 + k_2 = 0$. Nous obtenons donc l'énoncé suivant:

II. *Pour que l'équation* (1) *soit du type* S_2 *il faut et il suffit que toutes les racines de* (2) *soient simples, qu'elles aient toutes la même partie réelle et que les rapports des leurs parties imaginaires soient tous rationnels.*

§ 4. Supposons maintenant que $k=n$. D'après le théorème 1 pour que l'équation (1) soit du type S_n il faut et il suffit que $y_1(x),\dots,y_n(x)$ étant un système fondamental des intégrales on puisse trouver des nombres x_i $(i=1,2,\dots,n,\ x_k \neq x_s)$ tels que l'on ait:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} y_1(x_1) & y_1(x_2)\dots y_1(x_n) \\ y_2(x_1) & y_2(x_2)\dots y_2(x_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n(x_1) & y_n(x_2)\dots y_n(x_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas particulier où toutes les racines de (2) sont réelles et simples la condition obtenue s'écrit:

$$\begin{vmatrix} e^{\gamma_1 x_1} & e^{\gamma_1 x_2} \dots & e^{\gamma_1 x_n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ e^{\gamma_n x_1} & e^{\gamma_n x_2} \dots & e^{\gamma_n x_n} \end{vmatrix} = 0 \quad (\gamma_1 < \dots < \gamma_n,\ x_1 < x_2 < \dots < x_n).$$

Une telle équation est cependant impossible[3]). En effet, si elle était remplie il existeraient des constantes $C_1,\dots,C_n$, non toutes nulles, telles que l'on aurait $C_1 e^{\gamma x_1} + \dots + C_n e^{\gamma x_n} = 0$ pour $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Or ceci est en contradiction avec la règle de DESCARTES généralisée[4]) d'après laquelle le nombre des racines de la dernière équation ne dépasse pas le nombre des changements de signe de la suite $C_1,\dots,C_n$ c. à d. $(n-1)$ au plus. Le cas où l'équation (2) possède des racines réelles multiples se traite de la même façon. Supposons, par exemple, que (2) possède des racines $\gamma_2,\dots,\gamma_n$ et que γ_1 est une racine double. La condition (3) s'écrira:

$$\begin{vmatrix} e^{\gamma_1 x_1} \\ x_1 e^{\gamma_1 x_1} \\ e^{\gamma_2 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_n x_1} \end{vmatrix} = 0\ ^{5)}.$$

---

[3]) G. Pólya et G. Szegö, *Aufgaben u. Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin, J. Springer, 1925, Bd. 2, V, Aufg. 76.

[4]) G. Pólya et G. Szegö, loc. cit. Bd. 2, V, Aufg. 75.

[5]) Pour abréger l'écriture je me bornerai souvent à n'écrire que quelques colonnes d'un déterminant ou même la première colonne seulement.

Si elle était remplie l'équation $C_1 e^{\gamma x_1} + \ldots + C_n e^{\gamma x_n} = 0$ aurait des racines $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ et la racine double γ_1, ce qui est encore en contradiction avec la règle de DESCARTES généralisée.

Supposons maintenant que l'équation (2) possède des couples des racines imaginaires et que la partie réelle d'un de ces couples est plus grande que les parties réelles de *toutes* les autres racines. Si le couple en question est $\alpha \pm i\beta$ l'équation (3) pourra s'écrire sous la forme

$$A \cos \beta x_1 + B \sin \beta x_1 + \ldots = 0$$

où A et B ne dépendent que de $x_2, x_3, \ldots, x_n$ et où les termes non écrites tendent vers zéro lorsque $x_1 \to +\infty$. En fixant les variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$ de manière que $A^2 + B^2 \neq 0$ on obtient une équation en x_1 qui posséde évidemment une infinité de racines, ce qui prouve que l'équation (1) est du type S_n. Abordons maintenant un cas un peu plus général: l'équation (2) possède un certain nombre des racines complexes de la même partie réelle α, à savoir $\alpha \pm i\beta_1, \alpha \pm i\beta_2, \ldots, \alpha \pm i\beta_m$ les parties réelles de toutes les autres racines étant inférieures à α. Je vais d'abord établir le lemme suivant.

Lemme 1. *Désignons par $N(X)$ le nombre des racines de l'équation:*

$$y(x) = a_1 \cos \beta_1 x + b_1 \sin \beta_1 x + \ldots + a_m \cos \beta_m x + b_m \sin \beta_m x = 0$$

dans l'intervalle $(0, X)$. Si $0 < |\beta_1| < |\beta_i|$ $(i = 2, \ldots, n)$ et $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ on a:

$$\varliminf_{X\to\infty} \frac{N(X)}{X} \geqslant \frac{|\beta_1|}{\pi}.$$

Posons

$$u = \int_{C_1}^{x} dx \ldots \int_{C_s}^{x} y(x)\, dx \quad (s \text{ signes d'intégration}).$$

En supposant que s soit un multiple de 4 et en choisissant convenablement des constantes d'intégration on pourra écrire:

$$u = \beta_1^{-s} \Big[a_1 \cos \beta_1 x + b_1 \sin \beta_1 x + \sum_{i=2}^{m} \left(\frac{\beta_1}{\beta_i}\right)^s (a_i \cos \beta_i x + b_i \sin \beta_i x) \Big].$$

Lorsque s est assez grand la somme $\sum_{i=2}^{m}$ est plus petite que $\sqrt{a_1^2+b_1^2}$ donc u possède nécessairement un zéro dans chaque intervalle $(\varphi+n\cdot\pi\beta_1^{-1},\ \varphi+(n+1)\pi\beta_1^{-1})$, $n=0,1,2,\ldots$, si φ est convenablement choisi. Il en résulte que u possède dans l'intervalle $(0,X)$ au moins $E(\pi^{-1}\beta_1 X)-2$ de zéros ($E(t)$ désigne la partie entière de t). En utilisant le théorème de Rolle on voit que l'équation $y(x)=u^{(s)}\cdot(x)=0$ possède dans $(0,X)$ $E(\pi^{-1}\beta_1 X)-s-2$ racines au moins et ceci entraîne immédiatement le lemme 1.

Remarque. On démontre de la manière semblable le lemme suivant (qui ne sera pas utilisé dans la suite):

Lemme 1'. *Plaçons nous dans les conditions du lemme* 1. *Si* $|\beta_m|>|\beta_i|$ $(i=1,2,\ldots,m-1)$ *et* $a_m^2+b_m^2\neq 0$ *on a:*

$$\overline{\lim_{X\to\infty}}\frac{N(X)}{X}\leqslant\frac{|b_m|}{\pi}.$$

En supposant que s soit un multiple de 4 on aura:

$$z=y^{(s)}=\beta_m^s\left[a_m\cos\beta_m x+b_m\sin\beta_m x+\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^s (a_i\cos\beta_i x+b_i\sin\beta_i x)\right]$$

$$z'=\beta_m^{s+1}\left[-a_m\sin\beta_m x+b_m\cos\beta_m x+\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{s+1} (-a_i\sin\beta_i x+b_i\cos\beta_i x)\right]$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit on a si s est assez grand

$$\left|\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^s (a_i\cos\beta_i x+b_i\sin\beta_i x)\right|<\varepsilon$$

donc $z(x)$ ne s'annule pas à l'intérieur des intervalles où l'on a $|a_m\cos\beta_m x+b_m\sin\beta_m x|>\varepsilon$. Nous allons voir que lorsque s

est assez grand $z(x)$ a exactement un zéro dans chaque l'intervalle où $|a_m \cos\beta_m x + b_m \sin\beta_m x| \leqslant \varepsilon$, l'égalité ayant lieu aux extrémités de l'intervalle. En effet, les signes de $z(x)$ sont différents aux deux extrémités de l'intervalle donc $z(x)$ s'annule à son intérieur. Supposons que $z(x)$ s'annule deux fois dans l'intervalle, $z'(x)$ devrait s'y annuler aussi. Or de l'inégalité $|a_m \cos\beta_m x + b_m \sin\beta_m x| < \varepsilon$ il résulte que l'on a $|-a_m \sin\beta_m x + b_m \cos\beta_m x| > \sqrt{a_m^2 + b_m^2 - \varepsilon^2}$ il suffit donc, en tenant compte de l'expression de $z'(x)$ de choisir s assez grand pour que l'on ait:

$$\left| \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{s+1} (-a_i \sin\beta_i x + b_i \cos\beta_i x) \right| < \sqrt{a_m^2 + b_m^2 - \varepsilon}$$

pour aboutir à une contradiction. De la propriété démontrée il résulte que l'équation $z(x) = 0$ possède dans l'intervalle $(0, X)$ au plus $E(\pi^{-1}\beta_m X) + 2$ racines. En tenant compte du théorème de Rolle on trouve donc que l'équation $y(x)$ possède dans $(0, X)$ $E(\pi^{-1}\beta_m X) + s + 2$ racines au plus et ceci entraîne immédiatement le lemme 1'.

Revenons au lemme 1. Il résulte de la démonstration de ce lemme qu'il existe une suite croissante $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ telle que $t_n \to +\infty$ et que $u(t_i) > 0$ lorsque i est impair et $u(t_i) < 0$ lorsque i est pair, tandis que $|u(t_i)|$ est pour tout i supérieur à un nombre fixe d (lorsque s est assez grand on peut poser par exemple $d = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}(2^{-1}|\beta_1|^{-s})$. Les différences $t_{i+1} - t_i$ sont toutes égales à $\pi|\beta_1|^{-1}$. On en déduit de suite qu'il existe une suite croissante $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ telle que $p_n \to \infty$ et que $u'(p_i) > 0$ lorsque i est impair et $u'(p_i) < 0$ lorsque i est pair, tandis que $|u'(p_i)|$ est pour tout i supérieur à $2^{-1}\pi^{-1}|\beta_1| d$. De plus les différences $p_{i+1} - p_i$ ne surpassent pas $2\pi|\beta_1|^{-1}$. En continuant ainsi on arrive à la conclusion *qu'il existe une suite $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ telle que $q_n \to \infty$, que $y(q_i) > 0$ lorsque i est impair et $y(q_i) < 0$ lorsque i est pair, tandis que la valeur absolue de $y(q_i)$ reste pour tout i supérieure au nombre*

$$2^{-1-s}\, \pi^{-s} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}.$$

Les considérations précedentes entrainent immédiatement le corollaire suivant: *toute équation de la forme*

$$(4)\qquad a_1 \cos \beta_1 x + b \sin \beta_1 x + \ldots + a_m \cos \beta_m x + b_m \sin \beta_m x + \varepsilon(x) = 0 \quad (\beta_i \neq 0)$$

oú $\varepsilon(x)$ est une fonction continue et qui tend vers zéro lorsque $x \to +\infty$ possède une infinité des racines. Or dans notre hypothèse: L'équation (2) possède des racines $\alpha \pm i\beta_1, \ldots, \alpha \pm i\beta_m$ $(\beta_i \neq 0)$ les parties réelles de toutes les autres racines étant inférieures à α l'équation (3) pourra s'écrire sous la forme (4) où l'on remplace x par x_1, (lorsque certaines des racines $\alpha \pm i\beta_1, \ldots, \alpha \pm i\beta_m$ sont multiples il ne faut conserver dans (4) que les termes qui correspondent aux racines d'ordre de multiplicité le plus élevé), il en résulte encore que (3) possède des racines en x_1 et que par suite (1) est du type S_n.

Supposons maintenant que les parties réelles des racines imaginaires de (2) ne dépassent pas α, cette limite étant d'ailleurs atteinte, et que (2) possède des racines réelles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ plus grandes ou égales à α. On peut supposer sans diminuer la généralité que $\alpha = 0$ et que les nombres x_i dans l'équation (3) soient tous positifs (cf. la remarque finale du § 2). Nous supposerons d'abord que les zéros γ_i soient simples et que l'on ait $0 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_s$. Si les racines purement imaginaires sont $\pm \beta_1 i, \pm \beta_2 i, \ldots, \pm \beta_m i$ l'équation (3) aura la forme:

$$(3)\qquad W = \begin{vmatrix} \vdots \\ \cos \beta_1 x_1 \\ \sin \beta_1 x_1 \\ \vdots \\ \cos \beta_m x_1 \\ \sin \beta_m x_1 \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_s x_1} \end{vmatrix} = 0$$

où les termes non écrits au-dessus de $\cos \beta_1 x_1$ contiennet des facteurs de la forme $e^{\alpha' x_1}$ avec $\alpha' < 0$. Choisissons des nombres positifs $p_2, \ldots, p_s$ tels que $1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_s$ et posons $x_2 = p_2 x_1, \ldots, x_s = p_s x_1$.

En tenant compte de la proposition suivante [6]): „Considérons les suites $x_1, \ldots, x_s$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ et soient $\mu_1, \ldots, \mu_s$ et $\nu_1, \ldots, \nu_s$

---

[6]) G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, University Press, 1934, p. 261—264.

des permutations arbitraires de la suite 1,2,..., s. La somme

$$\sum_{i=1}^{s} x_{\mu_i} \gamma_{\nu_i}$$

atteint sa plus grande valeur lorsque les suites x_{μ_i} et γ_{ν_i} sont monotones dans le même sens" et en développant le déterminant W d'après la formule de LAPLACE suivant les mineurs formés à l'aide de ses s premières colonnes on arrive au développement:

$$\pm W = \begin{vmatrix} e^{\gamma_1 x_1} & e^{\gamma_1 p_2 x_1} & \ldots & e^{\gamma_1 p_s x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{\gamma_s x_1} & e^{\gamma_s p_2 x_1} & \ldots & e^{\gamma_s p_s x_1} \end{vmatrix} A + e^{(p_2\gamma_2 + \ldots + p_s\gamma_s) x_1}$$

$$[a_1 \cos \beta_1 x_1 + b_1 \sin \beta_1 x_1 + \ldots + a_m \cos \beta_m x_1 + b_m \sin \beta_m x_1] + \ldots \text{ [7])}$$

où les termes non écrits sont d'ordre inférieur lorsque $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_{n-1}$ sont fixes et que $x_1 \to +\infty$ et où A est le déterminant:

$$A = \begin{vmatrix} \vdots \\ \cos \beta_1 x_{s+1} \\ \sin \beta_1 x_{s+1} \\ \vdots \\ \cos \beta_m x_{s+1} \\ \sin \beta_m x_{s+1} \end{vmatrix}$$

tandis que les constantes a_i, b_i ne dépendent que de $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$; on peut supposer qu'elles ne sont pas toutes nulles.

Or l'équation $A=0$ c'est l'équation (3) (dans laquelle on a remplacé n par $n-s$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $x_{s+1}, \ldots, x_n$) dans le cas précedemment étudié: l'équation caractéristique possède des racines imaginaires dont la partie réelle est nulle tandis que les parties réelles de toutes les autres racines sont négatives. D'après ce qui précède il existent donc des nombres $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ qui annulent A. $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ étant ainsi choisis l'équation en x_1 $W=0$ pourra s'écrire, après la division par un facteur exponentiel, sous la forme (4) et par con-

[7]) Lorsque il y a des racines multiples de la partie réelle nulle $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m$ correspondent aux racines dont l'ordre de multiplicité est le plus élevé et il faut multiplier le deuxième terme par une puissance de x_1.

séquent possède des racines, il s'ensuit que l'équation (1) est du type S_n. Lorsque certaines parmi les racines γ_i sont multiples la démonstration est toute pareille, il faut seulement remplacer certaines des expotentielles $e^{\gamma_i x_k}$ par $x_k e^{\gamma_i x_k}, x_k^2 e^{\gamma_i x_k} \dots$ En résumé nous obtenons l'énoncé suivant:

III. *Pour que l'équation* (1) *soit du type* L_n *il faut et il suffit que toutes les racines de l'équation caractéristique* (2) *soient réelles.*

§ 5. Nous supposerons maintenant que $k=(n-1)$ et d'abord que l'équation (2) *possède au moins deux couples des racines imaginaires.* Nous allons voir que dans ces conditions l'équation (1) est du type S_{n-1} dans des cas très généraux (et vraisemblement même sans aucune restriction). Dans le cas où le rapport des parties imaginaires des deux couples en question est rationnel cette assortation résulte immédiatement de l'énoncé XIII (§ 12), nous supposerons donc dans tout ce qui suit (§§ 5—10) que *le rapport des parties imaginaires des deux couples des racines imaginaires est un nombre irrationnel.* Nous allons tout d'abord établir l'énoncé suivant:

IV. *L'équation* (1) *est du type* S_{n-1} *lorsque l'équation* (2) *possède deux couples des racines imaginaires dont les parties réelles sont inégales tandis que les parties réelles de toutes les autres racines (réelles ou complexes) sont inférieures à celles de chacun des deux couples en question. On suppose que toutes les racines de* (2) *soient simples et que les parties réelles de tous les couples de racines complexes soient distinctes entre elles.*

On peut supposer, grâce à une transformation T (§ 2) que les deux couples des racines en question sont $\pm i$ et $\alpha \pm \beta i$ avec $\alpha < 0$, β étant positif et irrationnel. Il résulte de l'énoncé I que pour que l'équation (1) soit du type S_{n-1} il est nécessaire que les deux équations:

$$X = \begin{vmatrix} \vdots \\ e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 \\ \cos x_1 \\ \sin x_1 \end{vmatrix} = 0, \quad Y = \begin{vmatrix} \vdots \\ e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1 \\ \cos x_1 \\ \sin x_1 \end{vmatrix} = 0$$

(dans lesquelles les pointillés correspondent à des racines dont les parties réelles sont négatives) possèdent des solutions communes en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $(x_i \neq x_k)$. D'après la théorie générale des équations linéaires cette condition est aussi suffisante, pourvu que l'un des mineurs obtenus en rayant une colonne de la matrice:

$$M = \left\| \begin{matrix} \vdots \\ \cos x_1 \\ \sin x_1 \end{matrix} \right\|$$

(qui possède $(n-2)$ lignes et $(n-1)$ colonnes) ne s'annule pas pour le système des valeurs qui annule X et Y. Nous allons considérer des nombres $x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}$ comme fixés et nous allons utiliser la proposition générale suivante:

Théorème A. Supposons que les fonctions $X(x_1, x_2)$ et $Y(x_1, x_2)$ sont continues, ainsi que leurs dérivées partielles du 1 ordre dans un domaine fermé et simplement connexe D limité par une courbe C composée d'un nombre fini des arcs analytiques. Supposons que X et Y ne s'annulent pas simultanément le long de C et désignons par P le nombre des racines communes des équations $X=0$, $Y=0$ qui sont contenues dans D et telles que le jacobien $\dfrac{D(X, Y)}{D(x_1, x_2)}$ y soit positif; soit de même N le nombre de ces racines communes pour lesquelles le jacobien est négatif. Dans ces conditions on a la formule:

$$(5) \qquad P-N = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2}.$$

Or l'expression sous signe de l'intégrale est égale à d arc tg$(Y:X)$ donc la formule (5) peut aussi s'écrire sous la forme suivante:

$$(6) \qquad P-N = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_c \Theta$$

où Θ désigne l'angle que fait dans le plan (X, Y) le rayon qui joint l'origine au point (X, Y) avec l'axe $0X$ et $\operatorname{Var}_c \Theta$ désigne

la variation continue de cet angle lorsque le point (x_1, x_2) décrit la courbe C dans le sens positif [8]).

Pour appliquer la formule (6) nous prendrons pour D un rectangle $ABCD$ situé dans la région où $x_2 > 0$, $x_1 > x_2$ et dont les côtés sont parallèles aux axes $0x_1, 0x_2$; les côtés AB et CD du rectangle, parallèles à l'axe $0x_1$ seront très grands et très petits au contraire les côtés BC et DA parallèles à l'axe $0x_2$. Il est clair que l'on a le long des côtés AB et CD des développements:

$$(7)\qquad \begin{aligned} X &= A_1 \cos x_1 + B_1 \sin x_1 + \dots \\ Y &= A_2 \cos x_1 + B_2 \sin x_1 + \dots \end{aligned}$$

où A_i et B_i ne dépendent que de $x_2, \dots, x_{n-1}$ et où les termes non écrits tendent vers zéro lorsque $x_1 \to +\infty$. Remarquons maintenant que si x_2 (de même que $x_3, \dots, x_{n+1}$) reste fixe et que x_1 augmente de 2π le point P de coordonnées $X_1 = A_1 \cos x_1 + B_1 \sin x_1$, $Y_1 = A_1 \cos x_1 + B_2 \sin x_1$ tourne une fois autour de l'origine dans le sens positif lorsque $\Delta = A_1 B_2 - B_1 A_2$ est positif et dans le sens négatif dans le cas contraire. On trouve, en effet, sans peine (cf. la formule (5)) que l'on a:

$$d\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{Y_1}{X_1}\right) = \frac{\Delta\, dx_1}{X_1^2 + Y_1^2}.$$

Soit ε un nombre positif arbitrairement petit. Puisque les termes complémentaires dans (7) tendent vers zéro lorsque $x_1 \to +\infty$ il est clair que si l'abscisse x_1^0 du côté AD est assez grande (on suppose que l'on a $x_1 \geqslant x_1^0$ dans le rectangle) et si les longueurs des cotés AB et CD sont égales à $2\pi n$ (n est un entier) la variation de l'angle Θ lorsque (x_1, x_2) décrit le coté AB ou DC aura le signe de Δ et sera plus grande que $2\pi n - \varepsilon$ en valeur absolue. Etudions le signe de Δ. Lorsque x_2 est positif et très grand on a un développement de la forme:

$$(8)\qquad e^{-\alpha x_2} \Delta = (K \cos x_2 + L \sin x_2)(M \cos \beta x_2 + N \sin \beta x_2) + \dots$$

où les coefficients K, L, M et N ne dépendent que de $x_3, x_4, \dots$ et où les termes non écrits tendent vers zéro lorsque $x_2 \to +\infty$.

---

[8]) La formule (5) est démontrée dans le *Cours d'Analyse* de E. Goursat, tome I, chapitre VII: Intégrales multiples.

On peut choisir $x_3, x_4, \dots$ de manière que $K^2+L^2 \neq 0$ et $M^2+N^2 \neq 0$. Nous aurons maintenant besoin du lemme suivant:

Lemme 2. *Considérons un nombre fini des suites infinies $A, B, \dots, L$:*

$$\begin{array}{ll} (A) & a,\ a+\alpha,\ a+2\alpha,\dots \\ (B) & b,\ b+\beta,\ b+2\beta,\dots \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (L) & l,\ l+\lambda,\ l+2\lambda,\dots \end{array} \qquad (\alpha>0,\ \beta>0,\dots,\ \lambda>0)$$

et supposons que les rapports $\beta/\alpha, \gamma/\alpha, \dots, \lambda/\alpha$ soient tous irrationnels. On peut extraire de la suite A une suite partielle $a+n_1\alpha, a+n_2\alpha, \dots, a+n_i\alpha, \dots$ telle que la différence entre un terme quelconque de cette suite et un terme quelconque des suites $B, \dots, L$ reste supérieure, en valeur absolue, à un nombre positif fixe (indépendent de l'indice i).

Il est d'abord clair qu'il existe au plus un terme de la suite A qui coïncide avec un terme de la suite B, par exemple. Autrement, on aurait, p, p', q, q' étant des entiers, $a+p\alpha=b+q\beta$ et $a+p'\alpha=b+q'\beta$ donc ausi $(p-p')\alpha=(q-q')\beta$ ce qui est impossible.

Supposons qu'il existe une infinité des entiers positifs n tels que l'on ait

$$a+n\alpha=b+p_n\beta+\varepsilon_n,$$
$$a+(n+1)\alpha=b+q_n\beta+\varepsilon'_n$$

où p_n et q_n sont des entiers positifs et où $\varepsilon_n \to 0$ et $\varepsilon'_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. En soustrayant les égalités obtenues on trouve que $\alpha=(q_n-p_n)\beta+\eta_n$ où $\eta_n \to 0$, il en résulte que pour n assez grand (q_n-p_n) est un entier fixe r. En passant à la limite on obtient la relation $r=\alpha/\beta$ qui est en contradiction avec notre hypothèse selon laquelle le rapport $\alpha:\beta$ est un nombre irrationnel. Ainsi donc, étant donnés deux termes consécutifs de la suite A la différence entre l'un d'eux au moins et un terme quelconque de la suite B est supérieure, en valeur absolue, à un nombre positif fixe. Il est donc possible d'extraire de la suite A une suite partielle A' telle que la différence entre un terme quelconque de A' et un terme quelconque de B reste

supérieure, en valeur absolue, à un nombre positif fixe. Les différences entre les termes consécutifs de la suite A' sont égales à a où à $2a$. Je dis maintenant qu'étant donnés deux termes consécutifs de la suite A', dans laquelle on a supprimé un nombre suffisant de termes au début[9]), la différence entre l'un d'eux au moins et un terme quelconque de la suite C est supérieure, en valeur absolue, à un nombre positif fixe. Dans le cas contraire, en effet, il existerait une infinité des entiers positifs n tels que l'on aurait ou bien

$$\begin{cases} a + na = c + p_n\gamma + \varepsilon_n \\ a + (n+1)a = c + q_n\gamma + \varepsilon'_n \end{cases}$$

ou bien $\begin{cases} a + na = c + p_n\gamma + \varepsilon_n \\ a + (n+2)a = c + q_n\gamma + \varepsilon''_n \end{cases}$ simultanément, où

p_n et q_n sont des entiers positifs et où $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon'_n \to 0$ et $\varepsilon''_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. En soustrayant des égalités obtenues on trouve que ou bien $a = (q_n - p_n)\gamma + \eta_n$ ou bien $2a = (q_n - p_n)\gamma + \eta'_n$ où η_n et η'_n tendent vers zéro lorsque $n \to \infty$, or ces égalités conduisent comme plus haut à une contradiction. Ainsi donc il est possible d'extraire de la suite A' une suite partielle A'' telle que la différence entre un terme quelconque de A'' et un terme quelconque des suites B et C est supérieure, en valeur absolue, à un nombre positif fixe. D'ailleurs les différences entre les termés consécutifs de la suite A'' sont égales à l'un des nombres $a, 2a, 3a, 4a$. Il est clair comment on peut continuer le même raisonnement en aboutissant à l'énoncé du lemme 2.

Il résulte de (8) que lorsque $x_2 \to +\infty$ Δ s'annule une infinité de fois, plus exactement il résulte du lemme 2 qu'il existe une infinité des racines de l'équation $K \cos x_2 + L \sin x_2 = 0$, par exemple, telles que $M \cos \beta x_2 + N \sin \beta x_2$ reste supérieur, lorsque x_2 est égal à l'une de ces racines, à un nombre positif fixe, il s'ensuit que ε étant un nombre positif arbitrairement petit il existe un nombre $\xi = \xi(\varepsilon)$ tel que chaque racine en question qui est plus grande que ξ est le centre d'un intervalle de longueur ε qui contient une racine (au moins) de l'équation $\Delta = 0$. Ces racines sont simples, on a, en effet, le développement:

---

[9]) On voit aisément que cette restriction pourrait être supprimée.

$$\frac{d}{dx_2}(e^{-\alpha x_2}\Delta)=(L\cos x_2-K\sin x_2)(M\cos\beta x_2+N\sin\beta x_2)+$$
$$+(K\cos x_2+L\sin x_2)(N\cos\beta x_2-M\sin\beta x_2)\beta+\ldots$$

où les termes non écrits tendent vers zéro lorsque $x_2 \to +\infty$ et il est clair que lorsque ε est assez petit il en sera de même avec $K\cos x_2+L\sin x_2$ tandis que les facteurs $L\cos x_2-K\sin x_2$ et $M\cos\beta x_2+N\sin\beta x_2$ resteront supérieurs, en valeur absolue, a des nombres positifs fixes. (Le même raisonnement prouve d'ailleurs, en tenant compte du théorème de ROLLE, que chaque nterValle de longueur ε contiendra exactement une racine de $\Delta=0$). Désignons par x_2^0 une des racines de $\Delta=0$ en question, il est clair que l'on peut trouver des nombres $\overline{x}_2$ et x_2 qui diffèrent d'aussi peu que l'on veut de x_2^0, tels que $\overline{x}_2<x_2^0<\overline{\overline{x}}_2$ et que les signes de $\Delta(\overline{x}_2)$ et de $\Delta(\overline{\overline{x}}_2)$ sont différents. Nous choisirons le rectangle $ABCD$ de manière que l'ordonnée x_2 du coté AB sera égale à $\overline{x}_2$ et que l'ordonnée du coté CD sera égale à $\overline{\overline{x}}_2$. Il est alors clair (cf. les raisonnements qui précedent la formule (8)) que la somme des variations de l'angle Θ lorsque le point (x_1, x_2) décrira les côtés (dirigés) AB et CD surpasse $4\pi n-2\varepsilon$ en valeur absolue. Pour pouvoir appliquer le Théorème A il nous faut encore étudier la variation de Θ le long des côtés verticaux BC et DA du rectangle $ABCD$. Nous allons utiliser dans ce but le lemme suivant:

Lemme 3. *Lorsque $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_k(z)$ sont des fonctions holomorphes dans l'intervalle fermé (a,b) (a et b finis) le nombre de zéros de la fonction $C_1f_1(z)+C_2f_2(z)+\ldots+C_kf_k(z)$ dans (a,b) est borné supérieurement par un nombre qui ne dépend pas des constantes $C_1, C_2, \ldots, C_k$.*

On peut évidemment supposer que $|C_i|\leqslant 1$ $(i=1,2,\ldots,k)$ et que $\max\limits_{i=1,\ldots,k}|C_i|=1$. Si le lemme était inexact on pourrait trouver une suite de fonctions $\varphi_n(z)=C_1^nf_1(z)+\ldots+C_k^nf_k(z)$ telles que $\varphi_n(z)$ aurait dans (a,b) n zéros au moins. De la suite $\varphi_n(z)$ on pourrait extraire une suite partielle $\varphi_{n_s}(z)$ telle que chacun des coefficients $C_i^{n_s}$ $(i=1,2,\ldots,k)$ tendrait vers une limites determinée K_i. On a évidemment $\max\limits_{i=1,\ldots,k}|K_i|=1$. La suite $\varphi_{n_s}(z)$ tendrait uniformément dans un domaine D conte-

nant le segment (a, b) à son intérieur vers la fonction $F(z) = K_1 f_1(z) + \ldots + K_k f_k(z)$. Cette dernière ayant un nombre fini de zéros dans un domaine contenant (a, b) il en résulte, en vertu des théorèmes connus, que le nombre de zéros des fonctions $\varphi_{n_s}(z)$ dans (a, b) serait borné, en contradiction avec ce qui précède[10]).

En considérant dans l'équation $X = 0$, par exemple, x_2 comme variable et $x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}$ comme constantes et en développant le déterminant X suivant les éléments de la colonne qui contient x_2 on voit bien que X est une combinaison linéaire d'un nombre fini des fonctions holomorphes de x_2, donc d'après le lemme 3 X ne s'annule le long des côtés BC et DA du rectangle $ABCD$ qu'un nombre borné (indépendant des abscisses de ces côtés) de fois, il en résulte évidemment que la variation de Θ le long des côtés en question ne dépasse pas, en valeur absolue, un nombre fixe H. Donc la variation de Θ le long du contour $ABCD$ est supérieure, d'après ce qui précède, à $4\pi n - 2\varepsilon - H$. En supposant que n soit assez grand et en appliquant le Théorème A on voit que les équations $X = 0$ et $Y = 0$ possèdent bien des racines communes dans le rectangle $ABCD$[11]). Pour prouver le Théorème IV il suffit d'établir que l'on peut choisir ces racines communes de manière qu'elles n'annulent pas l'un des mineurs d'ordre $(n-2)$ de la matrice M, le mineur:

$$W = \begin{vmatrix} \vdots \\ \cos x_2 \\ \sin x_2 \end{vmatrix}$$

par exemple. Il suffira même de montrer que les racines convenables x_2 de l'équation $\Delta = 0$ n'annulent pas W. En effet, la longueur des côtés verticaux BC et DA du rectangle $ABCD$ est arbitrairement petite on pourra donc choisir ces côtés de

[10]) Le lemme subsiste d'ailleurs dans les conditions moins restrictives. Il suffit, par exemple, de supposer que $f_1(z) \ldots f_k(z)$ possèdent dans (a, b) des dérivées continues d'ordre s $(s > 1)$ et que chacune de ces fonctions possède dans (a, b) au plus un nombre fini de zéros d'ordre s de multiplicité au plus.

[11]) Le raisonnement pourrait être en défaut lorsque X s'annule identiquement le long de BC ou de DA, on remplacera alors X par Y.

manière que W ne s'annule pas dans tout le rectangle $ABCD$. Nous allons distinguer plusieurs cas:

1° L'équation caractéristique (2) possède la racine réelle $\delta < \alpha$, il n'y a pas des racines dont les parties réelles seraient comprises entre δ et α.

Lorsque $x_2 \to +\infty$ on a dans ce cas les développements de la forme:

$$\begin{aligned} \Delta &= (K \cos x_2 + L \sin x_2)(M \cos \beta x_2 + N \sin \beta x_2)\, e^{\alpha x_2} + \\ &\quad + (P \cos x_2 + Q \sin x_2)\, e^{\delta x_2} + \ldots \\ W &= K \cos x_2 + L \sin x_2 + R\, e^{\delta x_2} + \ldots \end{aligned}$$

où les termes non écrits sont d'ordre inférieur et où les coefficients ne dépendent que de $x_3, \ldots, x_{n-1}$. On peut supposer que $R \neq 0$. Supposons d'abord que $PL - KQ \neq 0$. Lorsque la racine x_2^0 de $\Delta = 0$ annule W on aura, d'après les développements ci-dessus:

$$\Delta = (P \cos x_2^0 + Q \sin x_2^0)\, e^{\delta x_2^0} + \ldots$$

où les termes non écrits sont sont d'ordre inférieur lorsque $x_2^0 \to +\infty$ ce qui conduit, pour x_2^0 assez grand, à une contradiction. Lorsque $PL - KQ = 0$ et la racine x_2^0 annule W on aura:

$$\Delta = -R\,(M \cos \beta x_2^0 + N \sin \beta x_2^0)\, e^{(\alpha+\delta) x_2^0} + \ldots$$

d'où encore une contradiction, car β étant irrationnel (cf. le début du § 5), on peut supposer, d'après le lemme 2, que $|M \cos \beta x_2^0 + N \sin \beta x_2^0|$ reste supérieur à un nombre positif fixe lorsque $x_2^0 \to +\infty$.

2° L'équation caractéristique (2) possède un couple de racines imaginaires $\alpha' \pm i\beta'$ $(\alpha' < \alpha)$, il n'y a pas des racines dont les parties réelles seraient comprises entre α' et α. Lorsque $x_2 \to +\infty$ on aura maintenant les développements:

$$W = K \cos x_2 + L \sin x_2 + (S \cos \beta' x_2 + T \sin \beta' x_2)\, e^{\alpha' x_2} + \ldots$$

$$\Delta = (K \cos x_2 + L \sin x_2)(M \cos \beta x_2 + N \sin \beta x_2)\, e^{\alpha x_2} + P(x_2)\, e^{\alpha' x_2} + \ldots$$

où

$$\begin{aligned} P(x_2) &= A \cos x_2 \cos \beta' x_2 + B \cos x_2 \sin \beta' x_2 + C \sin x_2 \cos \beta' x_2 + \\ &\quad + D \sin x_2 \sin \beta' x_2, \end{aligned}$$

les termes non écrits sont d'ordre inférieur et où tous les coefficients ne dépendent que de $x_3, \ldots, x_{n-1}$. Nous avons déjà supposé que $L^2+K^2 \neq 0$ et que $M^2+N^2 \neq 0$, on peut supposer en outre (en choisissant convenablement $x_3, \ldots, x_{n-1}$) que $L \neq 0$, $S^2+T^2 \neq 0$ et $A^2+B^2+C^2+D^2 \neq 0$. Nous avons supposé que les racines x_2^0 de $\Delta=0$ se rapprochent indéfiniment (dans le sens précisé plus haut) vers les racines de l'équation $K\cos x_2+L\sin x_2=0$ lorsque $x_2^0 \to +\infty$, il en résulte que $\operatorname{tg} x_2^0 \to -KL^{-1}$, on aura donc, en supposant que les quantités

$$E=A-\frac{CK}{L} \qquad F=B-\frac{DK}{L}$$

ne s'annulent pas simultanément:

$$P(x_2^0)=\cos x_2^0[(E+\varepsilon)\cos\beta' x_2^0+(F+\varepsilon)\sin\beta' x_2^0]$$

où ε et ε' tendent vers zéro lorsque $x_2^0 \to +\infty$. D'après le lemme 2 on pourra donc supposer que $P(x_2^0)$ reste supérieur, en valeur absolue, à un nombre positif fixe (β' est irrationnel, cf. le début du § 5). Supposons maintenant que la racine x_2^0 de $\Delta=0$ annule W, on aura:

$$\Delta(x_2^0)=P(x_2^0)\,e^{\alpha' x_2^0}+\ldots$$

où les termes non écrits sont d'ordre inférieur lorsque $x_2^0 \to +\infty$, d'où une contradiction avec le fait que $\Delta(x_2^0)=0$.

Il reste à examiner le cas où $E=F=0$. On voit aisément que l'on a dans ce cas

$$P(x_2)=L^{-1}(K\cos x_2+L\sin x_2)(C\cos\beta' x_2+D\sin\beta' x_2)$$

où $C^2+D^2 \neq 0$, il en résulte que lorsque la racine x_2^0 de $\Delta=0$ annule W on aura:

$$\Delta=-[M\cos\beta x_2^0+N\sin\beta x_2^0][S\cos\beta' x_2^0+T\sin\beta' x_2^0]\,e^{(\alpha+\alpha')x_2^0}+\ldots$$

β et β' étant irrationnels on peut supposer d'après le lemme 2, que les deux crochets restent supérieurs à un nombre positif fixe en valeur absolue lorsque $x_2^0 \to +\infty$, d'où encore une contradiction avec le fait que $\Delta(x_2^0)=0$.

3° Lorsque $n=4$ on a

$$\Delta = \sin(x_3 - x_2)\sin[\beta(x_3 - x_2)]\, e^{\alpha(x_2+x_3)}$$

x_3 étant fixé arbitrairement nous prendrons pour x_0^2 une racine de l'équation $\sin\beta(x_3 - x_2) = 0$. On a maintenant $W = \sin(x_3 - x_2)$, donc d'après le lemme 2 on aura $W(x_2^0) \neq 0$ lorsque x_2^0 est assez grand et convenablement choisi.

Remarque. Si nous avons fait, pour $n > 4$, un choix des racines de $\Delta = 0$ qui conduit à des considérations plus compliquées c'est en vue des applications ultérieures (cf. § 7). Il résulte de la démonstration que dans les systèmes de valeurs $x_1, \ldots, x_n$ qui annullent X et Y les nombres $x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}$ sont dans une large mesure arbitraires.

§ 6. Nous allons maintenant établir l'énoncé que voici:

V. *L'équation* (1) *est du type* S_{n-1} *lorsque l'équation* (2) *possède deux couples des racines imaginaires, soit* $\alpha \pm i\beta$ *et* $\alpha_1 \pm i\beta_1$, *telles que* $\alpha < \alpha_1$ *et une racine réelle* δ *telle que* $\alpha < \delta < \alpha_1$, *tandis que toutes les autres racines (s'il en existe) ont leurs parties réelles comprises entre* δ *et* α. *On suppose que toutes les racines de* (2) *soient simples et que les parties réelles de tous les couples de racines complexes soient distinctes entre elles.*

On peut supposer, grâce à une transformation T (§ 2) que l'on a $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 1$. D'après l'énoncé I il suffira d'établir l'existence des solutions communes des équations:

$$X = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_1}\cos\beta x_1 \\ e^{\delta x_1} \\ \vdots \\ \sin x_1 \\ \cos x_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad Y = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_1}\sin\beta x_1 \\ e^{\delta x_1} \\ \vdots \\ \sin x_1 \\ \cos x_1 \end{vmatrix} = 0$$

(dans lesquelles les pointillés correspondent à des racines dont les parties réelles sont comprises entre δ et 0), telles que $x_i \neq x_k$ et qui n'annulent pas le déterminant d'ordre $(n-2)$.

$$W = \begin{vmatrix} e^{\delta x_2} \\ \vdots \\ \sin x_2 \\ \cos x_2 \end{vmatrix}$$

Nous suivrons la méthode du § 5, mais contrairement à ce qui avait lieu dans ce § nous supposerons que x_2 est très grand en valeur absolue et *négatif*. On s'appuie donc encore sur le Théorème A en prenant pour D un rectangle $ABCD$ situé dans la région du plan (x_1,x_2) où $x_1>0$ et $-x_1<x_2<0$, dont les côtés AB et CD sont très grands et parallèles à l'axe $0x_1$, tandis que les côtés BC et DA sont très petits et parallèles à l'axe $0x_2$. Comme au § 5 on a le long des côtés AB et CD les développements (7) où A_i et B_i ne dépendent que de $x_2,\ldots,x_{n-1}$ et où les termes non écrits tendent vers zéro lorsque $x_1\to+\infty$. On a encore à étudier l'expression $\Delta=A_1B_2-B_1A_2$. Lorsque x_2 est négatif et très grand en valeur absolue on a un développement de la forme:

$$e^{-(\alpha+\delta)x_2}\Delta=M\cos\beta x_2+N\sin\beta x_2+\ldots \tag{9}$$

où les coefficients M et N ne dépendent que de $x_3,\ldots,x_{n-1}$ et où les termes non écrits tendent vers zéro lorsque $x_2\to-\infty$. On peut choisir $x_3,\ldots,x_{n-1}$ de manière que $M^2+N^2\neq0$. Il résulte de (9) que Δ s'annule une infinité de fois lorsque $x_2\to-\infty$ et que les autres variables restent fixes, on constate aisément que ces racines sont simples. Soit x_2^0 l'une de ces racines, on peut trouver des nombres $\bar{x}_2$ et $\bar{\bar{x}}_2$ qui diffèrent d'aussi peu que l'on veut de x_2^0, tels que $\bar{x}_2<x_2^0<\bar{\bar{x}}_2$ et que les signes de $\Delta(\bar{x}_2)$ et $\Delta(\bar{\bar{x}}_2)$ sont différents. Nous choisirons le rectangle $ABCD$ de manière que l'ordonnée x_2 du côté AB sera égale à $\bar{x}_2$ et que l'ordonnée du côté CD sera égale à $\bar{\bar{x}}_2$. On voit alors comme au § 5 que lorsque les côtés AB et CD sont suffisamment grands leur contribution à la variation de Θ lorsque le point (x_1,x_2) décrit le contour $ABCD$ sera très grande. Au contraire, il résulte du lemme 3 du § 5 que la contribution des côtés BC et DA à la variation de Θ reste bornée. D'après le théorème A les équations $X=0$, $Y=0$ possèdent donc des racines communes dans le rectangle $ABCD$. Il faut encore montrer que ces racines n'annulent pas le déterminant W. Or lorsque x_2 est négatif et très grand en valeur absolue on a le développement:

$$W=Pe^{\delta x_2}+\ldots$$

où P ne dépend que de $x_3,\ldots,x_{n-1}$ et où les termes non écrits sont d'ordre inférieur lorsque $x_2\to-\infty$. On peut choisir $x_3,\ldots,x_{n+1}$

de manière que $P \neq 0$, on aura alors $W(x_2^0) \neq 0$ lorsque la racine x_2^0 de $\Delta = 0$ est suffisamment grande en valeur absolue.

Remarque. Il résulte de la démonstration que dans les systèmes de valeurs $x_1, \ldots, x_{n-1}$ qui annulent X et Y les nombres $x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}$ sont dans une large mesure arbitraires.

§ 7. Nous allons maintenant déduire de l'énoncé IV le suivant:

VI. *L'équation* (1) *est du type* S_{n-1} *lorsque l'équation caractéristique* (2) *possède outre les racines dont l'ensemble E satisfait aux conditions du théorème IV un certain nombre de racines réelles, simples et plus grandes que les parties réelles de toutes les racines de l'ensemble E.*

Grâce à une transformation T (§ 2) on peut supposer que l'équation (2) possède des racines $\pm i$, $\alpha \pm \beta i$ $(\alpha < 0, \beta > 0)$ et en outre s racines réelles, simples et positives, soit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ $(\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_s)$. Les parties réelles des autres racines de (2) (s'il en existe) sont toutes inférieures à α. D'après l'énoncé *I* il suffit de montrer que les équations:

$$X = \begin{vmatrix} \vdots \\ e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 \\ e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1 \\ \cos x_1 \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_s x_1} \end{vmatrix} = 0 \quad Y = \begin{vmatrix} \vdots \\ e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 \\ e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1 \\ \sin x_1 \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_s x_1} \end{vmatrix} = 0$$

(dans lesquelles les pointillés en haut correspondent à des racines dont les parties réelles sont inférieures à α) possèdent un système des racines communes qui n'annule pas un mineur d'ordre $(n-2)$ de la matrice:

$$M = \left\| \begin{matrix} \vdots \\ e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 \\ e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1 \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_s x_1} \end{matrix} \right\|$$

obtenu en supprimant une colonne de cette matrice. Nous poserons dans ce but $x_2=p_2x_1$, $x_3=p_3x_1,\dots,x_s=p_sx_1$ (cf. le § 4, $1<p_2<\dots<p_s$); en supposant que $x_{s+2},x_{s+3},\dots,x_{n-1}$ soient fixés nous allons considérer X et Y comme fonctions des variables x_1 et x_{s+1}. En développant X et Y d'après la formule de Laplace suivant les mineurs d'ordre s formés avec les éléments des s premières colonnes des déterminants X et Y on aura [12])

$$
\text{(10)}\quad
\begin{aligned}
X &= \begin{vmatrix} e^{\gamma_1 x_1}\dots e^{\gamma_1 p_s x_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e^{\gamma_s x_1}\dots e^{\gamma_s p_s x_1} \end{vmatrix}\cdot X_1 + \begin{vmatrix} \cos x_1\dots \cos p_s x_1 \\ e^{\gamma_2 x_1}\dots e^{\gamma_2 p_s x_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e^{\gamma_s x_1}\dots e^{\gamma_s p_s x_1} \end{vmatrix}\cdot Z + \dots \\
Y &= \begin{vmatrix} e^{\gamma_1 x_1}\dots e^{\gamma_1 p_s x_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e^{\gamma_s x_1}\dots e^{\gamma_s p_s x_1} \end{vmatrix}\cdot Y_1 + \begin{vmatrix} \sin x_1\dots \sin p_s x_1 \\ e^{\gamma_2 x_1}\dots e^{\gamma_2 p_s x_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e^{\gamma_s x_1}\dots e^{\gamma_s p_s x_1} \end{vmatrix}\cdot Z + \dots
\end{aligned}
$$

où

$$
X_1 = \pm \begin{vmatrix} \vdots \\ e^{\alpha x_{s+1}}\cos\beta x_{s+1} \\ e^{\alpha x_{s+1}}\sin\beta x_{s+1} \\ \cos x_{s+1} \end{vmatrix}
\qquad
Y_1 = \pm \begin{vmatrix} \vdots \\ e^{\alpha x_{s+1}}\cos\beta x_{s+1} \\ e^{\alpha x_{s+1}}\sin\beta x_{s+1} \\ \sin x_{s+1} \end{vmatrix}
$$

$$
Z = \pm \begin{vmatrix} \vdots \\ e^{\alpha x_{s+1}}\cos\beta x_{s+1} \\ e^{\alpha x_{s+1}}\sin\beta x_{s+1} \\ e^{\gamma_1 x_{s+1}} \end{vmatrix}.
$$

Nous pouvons supposer que $n>s+4$, en effet, lorsque $n=s+4$ une transformation T (symétrie par rapport à l'axe imaginaire) nous ramène au cas de l'énoncé IV. Il résulte des énoncés IV et I qu'il existent des nombres $x^0_{s+1}, x^0_{s+2},\dots,x^0_{n-1}$ tous distincts entre eux qui annulent simultanément X_1 et Y_1. On peut d'ailleurs supposer que les nombres x^0_{s+1} et x^0_{s+2} sont

[12]) Lorsque $s=1$ les déterminants qui multiplient Z se réduisent à $\cos x_1$ et $\sin x_1$.

positifs et arbitrairement grands. On peut aussi supposer que les nombres x_i^0 n'annulent pas le déterminant:

$$W_1 = \begin{vmatrix} \vdots \\ e^{\alpha x_{s+2}} \cos \beta x_{s+2} \\ e^{\alpha x_{s+2}} \sin \beta x_{s+2} \end{vmatrix}.$$

En effet, le développement de W_1 lorsque $x_{s+2} \to +\infty$ est de la forme:

$$W_1 = (A \cos \beta x_{s+2} + B \sin \beta x_{s+2}) e^{\alpha x_{s+2}} + \dots$$

où A et B ne dépendent que de $x_{s+3}, \dots, x_{n-1}$ et où l'on peut supposer que $A^2 + B^2 \neq 0$. β étant irrationnel (cf. le commencement du § 5) notre assertion résulte du lemme 2 et du fait que les nombres x_{s+2}^0 diffèrent d'aussi peu que l'on veut des racines d'une équation de la forme: $K \cos x_{s+2} + L \sin x_{s+2} = 0$ (cf. la démonstration du § 5). On peut enfin admettre que les nombres x_i^0 n'annulent pas Z, car lorsque $x_{s+1} \to +\infty$ on a un développement de la forme:

$$Z = Q e^{\gamma_1 x_{s+1}} + \dots \quad \text{et lorsque} \quad x_{s+2} \to +\infty \quad \text{on a}$$
$$Q = (Q_1 \cos \beta x_{s+2} + Q_2 \sin \beta x_{s+2}) e^{\alpha x_{s+2}} + \dots$$

où les termes non écrits sont d'ordre inférieur et Q_1 et Q_2 ne dépendent que de $x_{s+3}, \dots, x_{n-1}$. On peut supposer que $Q_1^2 + Q_2^2 \neq 0$, il résulte alors comme plus haut du lemme 2 que les nombres x_i^0 n'annulent pas Q, ces nombres n'annulent donc pas Z pourvu que x_{s+1}^0 soit assez grand. Nous allons maintenant utiliser le théorème A en prenant pour D un rectangle $ABCD$ situé dans la région du plan (x_1, x_{s+1}) où $x_{s+1} > 0$ et $x_1 > x_{s+1}$, dont les côtés AB et CD sont très grands et parallèles à l'axe $0x_1$ tandis que les côtés BC et DA sont très petits et parallèles à l'axe $0x_{s+1}$, nous supposerons d'ailleurs que l'ordonnée x_{s+1} du côté AB est égale au nombre x_{s+1}^0. En supposant que $x_1 \to +\infty$ et en profitant de la proposition citée au renvoi[9]) du § 4 on trouve alors d'après (10) le long de AB le développement:

$$X = Z e^{(\gamma_2 p_2 + \dots + \gamma_s p_s) x_1} \cos x_1 + \dots$$
$$Y = Z e^{(\gamma_2 p_2 + \dots + \gamma_s p_s) x_1} \sin x_1 + \dots$$

où les termes non écrits sont d'ordre inférieur [13]). (On constate aisément que les termes non écrits dans (10) fournissent les termes d'ordre inférieur du développement). Il en résulte immédiatement que la variation de Θ le long du côté AB est égale asymptotiquement (lorsque les abscisses des côtés CD et DA augmentent indéfiniment) à $(2\pi)^{-1}\cdot AB$. L'ordonnée $\bar{x}_{1+1}$ du côté CD sera choisie de manière que $X_1 \neq 0$ pour $x_{s+1} = \bar{x}_{s+1}$, il résulte alors de (10) que lorsque l'abscisse du côté DA (et par conséquant du tout point du rectangle $ABCD$) est assez grande on a $X \neq 0$ le long de CD, la variation de Θ le long de ce côté ne pourra donc dépasser π. Il résulte d'autre part du lemme 3 (cf. le § 5) que la variation de Θ le long des côtés verticaux CD et DA reste bornée. En définitive la variation de Θ lorsque le point (x_1, x_{s+1}) décrit le contour $ABCD$ est asymptotiquement égale à $(2\pi)^{-1}\cdot AB$, donc d'après le Théorème A les équations $X=0$ et $Y=0$ possèdent des racines communes dans le rectangle $ABCD$.

Considérons maintenant le mineur. W obtenu en supprimant cette colonne de la matrice M qui contient la variable x_{s+1}:

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_1}\cos\beta x_1 & e^{\alpha p_s x_1}\cos\beta p_s x_1 & e^{\alpha x_{s+2}}\cos\beta x_{s+2} \\ e^{\alpha x_1}\sin\beta x_1 & e^{\alpha p_s x_1}\sin\beta p_s x_1 & e^{\alpha x_{s+2}}\sin\beta x_{s+2} \\ e^{\gamma_1 x_1} & e^{\gamma_1 p_s x_1} & e^{\gamma_1 x_{s+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{\gamma_s x_1} & e^{\gamma_s p_s x_1} & e^{\gamma_s x_{s+2}} \end{vmatrix}.$$

Lorsque $x_1 \to +\infty$ on a un développement de la forme:

$$W = e^{(\gamma_1+\gamma_2 x_2+\dots+\gamma_s p_s)x_1} W_1 + \dots$$

où les termes non écrits sont d'ordre inférieur. Comme $W_1 \neq 0$ W ne s'annule donc pas dans tout le rectangle $ABCD$ pourvu que les abscisses des côtés BC et DA soient assez grandes, en particulier les racines communes des équations $X=0$ et $Y=0$ n'annulent pas W et ceci achève la démonstration.

§ 8. Nous allons maintenant étendre l'énoncé V de la manière suivante:

---

[13]) Lorsque $s=1$ on remplace $\gamma_2 p_2 + \dots + \gamma_s p_s$ par 0.

VII. *L'équation* (1) *est du type* S_{n-1} *lorsque l'équation caractéristique* (2) *possède outre les racines dont l'ensemble* F *satisfait aux conditions du théorème* V *un certain nombre de racines réelles, simples et plus grandes que les parties réelles de toutes les racines de l'ensemble* F.

Nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité du résultat, que l'ensemble F contient une racine réelle μ, telle que $\alpha < \delta \leqslant \mu < \alpha_1$ (cf. l'énoncé V), la partie réelle d'aucune racine de F n'étant pas comprise entre μ et α_1, dans le cas contraire, en effet, on est ramené à l'énoncé VI. En tenant compte d'une transformation T (§ 2) on peut donc admettre que l'équation (2) possède des racines imaginaires $\pm i$ et $\alpha \pm i\beta\,(\alpha < 0)$, des racines réelles δ et μ telles que $\alpha < \delta \leqslant \mu < 0$ et des racines positives $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_s$. Toutes les autres racines de (2) (s'il en existe) ont leurs parties réelles comprises entre δ et μ. Pour établir l'énoncé VII il suffit, d'après le Théorème I de montrer que les équations:

$$X = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 \\ e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1 \\ e^{\delta x_1} \\ \vdots \\ e^{\mu x_1} \\ \cos x_1 \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_s x_1} \end{vmatrix} = 0 \qquad Y = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 \\ e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1 \\ e^{\delta x_1} \\ \vdots \\ e^{\mu x_1} \\ \sin x_1 \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_s x_1} \end{vmatrix} = 0$$

possèdent un système des racines communes $(x_i \neq x_k)$ qui n'annule pas un déterminant obtenu en supprimant une colonne quelconque de la matrice:

$$M = \begin{Vmatrix} e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 \\ e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1 \\ e^{\delta x_1} \\ \vdots \\ e^{\mu x_1} \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_s x_1} \end{Vmatrix}$$

Nous poserons $x_2 = p_2 x_1, x_3 = p_3 x_1, \ldots, x_s = p_s x_1 (1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_s)$ et en supposant que $x_{s+2}, x_{s+3}, \ldots, x_{n-1}$ soient fixés nous allons considérer X et Y comme des fonctions des variables x_1 et x_{s+1}. On aura encore pour X et Y les formules (10) dans lesquelles X_1, Y_1 et Z désigneront les déterminants:

$$X_1 = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_{s+1}} \cos \beta x_{s+1} \\ e^{\alpha x_{s+1}} \sin \beta x_{s+1} \\ e^{\delta x_{s+1}} \\ \vdots \\ e^{\mu x_{s+1}} \\ \cos x_{s+1} \end{vmatrix} \qquad Y_1 = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_{s+1}} \cos \beta x_{s+1} \\ e^{\alpha x_{s+1}} \sin \beta x_{s+1} \\ e^{\delta x_{s+1}} \\ \vdots \\ e^{\mu x_{s+1}} \\ \sin x_{s+1} \end{vmatrix}$$

$$Z = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_{s+1}} \cos \beta x_{s+1} \\ e^{\alpha x_{s+1}} \sin \beta x_{s+1} \\ e^{\delta x_{s+1}} \\ \vdots \\ e^{\mu x_{s+1}} \\ e^{\gamma_1 x_{s+1}} \end{vmatrix}.$$

Il résulte de la démonstration de l'énoncé V et de l'énoncé I que les équations (3) de l'énoncé I, dans lesquelles on a remplacé les nombres $x_1, \ldots x_k$ par $x_{s+1}\, x_{s+2}, \ldots, x_{p-1}$ et les $y_i(x)$ par les intégrales de l'équation qui correspond à l'énoncé V, possèdent un système de solutions tel que $x_i \neq x_k$ et que $x_{s+1} > 0$, $x_{s+2} < 0$, tandis que les valeurs absolues de ces deux derniers nombres sont arbitrairement grandes. Or il est clair que dans le cas considéré (cf. le commencement de ce §) l'ensemble symétrique de F par rapport à l'axe imaginaire satisfait encore, comme F, aux conditions du Théorème V. D'autre part, les équations (3) de l'énoncé I restent satisfaites lorsqu'on y change le signe des parties réelles de toutes les racines de l'équation caractéristique pourvu que l'on change aussi les signes de tous les nombres x_i. On voit donc, en tenant compte des transformations T (cf. la fin du § 2), que les équations $X_1 = 0$ et $Y_1 = 0$ possédent un système $x^0_{s+1}, x^0_{s+2}, \ldots, x^0_{n-1}$ de racines communes tel que $x^0_i \neq x^0_k$ et que $x^0_{s+1} < 0$, $x^0_{s+2} > 0$, tandis que les valeurs absolues de ces deux derniers nombres sont arbitrairement grandes. Nous allons voir qu'il est possible

de choisir $x^0_{s+1}, x^0_{s+2}, \dots, x^0_{n-1}$ de manière que ces nombres n'annullent pas ni Z ni le déterminant:

$$W_1 = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_{s+2}} \cos \beta x_{s+2} \\ e^{\alpha x_{s+2}} \sin \beta x_{s+2} \\ e^{\delta x_{s+2}} \\ \vdots \\ e^{\mu x_{s+2}} \end{vmatrix}.$$

En ce qui concerne W_1 il suffit de choisir $x^0_{s+3}, x^0_{s+4}, \dots, x^0_{n-1}$ de manière que ces nombres n'annulent pas le mineur de W_1 qui correspond à l'élément $e^{\mu x_{s+2}}$ et de choisir ensuite x^0_{s+2} assez grand [14]). Supposons maintenant que les nombres x^0_i annulent simultanément X_1, Y_1 et Z. En supprimant, pour simplifier l'écriture, l'exposant 0 nous aurions les équations de la forme:

$$Ae^{\alpha x_{s+1}} \cos \beta x_{s+1} + Be^{\alpha x_{s+1}} \sin \beta x_{s+1} + (C + C_1)e^{\delta x_{s+1}} = 0$$

$$De^{\alpha x_{s+1}} \cos \beta x_{s+1} + Ee^{\alpha x_{s+1}} \sin \beta x_{s+1} + (F + F_1)e^{\delta x_{s+1}} = 0$$

$$Se^{\alpha x_{s+1}} \cos \beta x_{s+1} + He^{\alpha x_{s+1}} \sin \beta x_{s+1} + (K + K_1)e^{\delta x_{s+1}} = 0$$

où

$$A = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_{s+2}} \sin \beta x_{s+2} \\ e^{\delta x_{s+2}} \\ \vdots \\ e^{\mu x_{s+2}} \\ \cos x_{s+2} \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} e^{\alpha x_{s+2}} \cos \beta x_{s+2} \\ e^{\delta x_{s+2}} \\ \vdots \\ e^{\mu x_{s+2}} \\ \cos x_{s+2} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_{s+2}} \cos \beta x_{s+2} \\ e^{\alpha x_{s+2}} \sin \beta x_{s+2} \\ \vdots \\ e^{\mu x_{s+2}} \\ \cos x_{s+2} \end{vmatrix}$$

et où C_1, F_1 et K_1 (qui contiennent aussi la variable x_{s+1}) tendent vers zéro lorsque $x_{s+1} \to -\infty$. D, E, F s'obtiennent de A, B, C respectivement en remplaçant dans leurs dernières lignes $\cos x_{s+2}, \dots$ par $\sin x_{s+2}, \dots$ et G, H, K s'obtiennent de A, B, C respectivement en remplaçant dans leurs dernières lignes

[14]) Cf. la remarque à la fin du § 5.

$\cos x_{s+2}, \ldots$ par $e^{\gamma_1 x_{s+2}}, \ldots$ Il résulte des trois équations écrites que l'on a:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} A & B & C+C_1 \\ D & E & F+F_1 \\ S & H & K+K_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or lorsque $x_{s+2} \to +\infty$ on a les développements:

$A = A' \cos x_{s+2} + A'' e^{\mu x_{s+2}} + \ldots$, $B = B' \cos x_{s+2} + B'' e^{\mu x_{s+2}} + \ldots$,
$C = C' \cos x_{s+2} + C'' e^{\mu x_{s+2}} + \ldots$, $D = A' \sin x_{s+2} + D'' e^{\mu x_{s+2}} + \ldots$,
$E = B' \sin x_{s+2} + E'' e^{\mu x_{s+2}} + \ldots$, $F = C' \sin x_{s+2} + F'' e^{\mu x_{s+2}} + \ldots$,
$G = A' e^{\gamma_1 x_{s+2}} + G'' e^{\mu x_{s+2}} + \ldots$, $H = B' e^{\gamma_1 x_{s+2}} + H'' e^{\mu x_{s+2}} + \ldots$,
$K = C' e^{\gamma_1 x_{s+2}} + K'' e^{\mu x_{s+2}} + \ldots$ où les coefficients $A', B', C', A'', B'', C'', D'', E'', F'', G'', H''$ et K'' ne dépendent que de $x_{s+3}, x_{s+4}, \ldots, x_{n-1}$ et où les termes non écrits sont d'ordre inférieur lorsque $x_{s+2} \to +\infty$. Il s'ensuit pour Γ un développement de la forme:

$$\Gamma = [\Gamma_1 e^{(2\mu+\gamma_1) x_{s+2}} + \ldots] + \ldots$$

où l'on a posé

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} A'' & B'' & C'' \\ D'' & E'' & F'' \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}.$$

et où les termes non écrits dans le crochet sont d'ordre inférieur que $e^{(2\mu+\gamma_1) x_{s+2}}$ lorsque $x_{s+2} \to +\infty$, tandis que les termes non écrits à la fin tendent vers zéro lorsque $x_{s+1} \to -\infty$. Il est donc clair que Γ ne s'annule pas pour des valeurs de x_{s+1} et x_{s+2} assez grandes en valeur absolue ($x_{s+1} < 0$, $x_{s+2} > 0$) pourvu que Γ_1 ne s'annule pas. Or ce déterminant ne dépend que de $x_{s+3}, x_{s+4}, \ldots, x_{n-1}$ et l'on constate qu'il ne s'annule pas identiquement en ces variables [15]). Il est donc toujours

[15]) Par exemple, lorsque l'équation (2) ne possède pas de racines dont la partie réelle serait comprise entre δ et μ on peut poser, pour le voir, $x_{s+3} = 0$ et $x_{s+4} = 2\pi\beta^{-1}$. Lorsque $x_{s+5} \to +\infty$ le terme principal du déterminant Γ_1 se reduit à

$$-e^{(2\alpha+\mu) x_{s+5}} (e^{\delta x_{s+4}} - e^{\alpha x_{s+4}})^2 \sin^2 \beta x_{s+5} \sin x_{s+4}$$

et β étant irrationnel on a bien $\sin x_{s+4} \neq 0$.

possible de choisir $x_{s+3}, \ldots, x_{n-1}$ de manière que $\Gamma_1 \neq 0$ (cf. la remarque à la fin du § 5). Alors, l'hypothèse $X_1 = Y_1 = Z = 0$ conduit, pour des valeurs de x^0_{s+1} et x^0_{s+2} assez grandes en valeur absolue, à une contradiction.

Les raisonnements qui suivent sont à peu près identiques à ceux employés dans la démonstration du Théorème VI. On construit encore dans la partie du plan (x_1, x_{s+1}) où $x_1 > 0$ et $x_{s+1} < 0$ un rectangle $ABCD$ dont les côtés AB et CD sont très grands et parallèles à l'axe $0x_1$, tandis que les côtés BC et DA sont très petits et parallèles à l'axe $0x_{s+1}$. On suppose que l'ordonnée du côté AB soit égale à x^0_{s+1}, tandis que l'ordonnée $\overline{x}_{s+1}$ du côté CD soit choisie de manière que X_1 ne s'annule pas pour $x_{s+1} = \overline{x}_{s+1}, x_{s+2} = x^0_{s+2}, \ldots, x_{n-1} = x^0_{n-1}$. On voit alors comme au § 7, en s'appuyant sur le Théorème A (§ 5), que lorsque le rectangle $ABCD$ se trouve dans la région où x_1 est assez grand et x_{s+1} assez petit les équations $X = 0$ et $Y = 0$ possèdent un système de racines communes soit $x_1 = x_1^*$, $x_{s+1} = x^*_{s+1}$ dans $ABCD$. On peut supposer que ces racines n'annulent pas le déterminant obtenu en supprimant la colonne qui contient la variable x_{s+1} de la matrice M. Il suffit, en effet, de choisir x_1^* assez grand: on le voit en développant le déterminant en question d'après la formule de LAPLACE suivant les mineurs d'ordre s formés à l'aide de s premières colonnes du déterminant et en tenant compte de l'inégalité $W_1 \neq 0$.

§ 9. Nous allons maintenant établir un résultat encore plus général:

VIII. *L'équation* (1) *est du type* S_{n-1} *lorsque l'équation caractéristique* (2) *possède outre les racines dont l'ensemble* F *satisfait aux conditions du Théorème V un certain nombre de racines réelles, simples et plus grandes ou plus petites que les parties réelles de toutes les racines de l'ensemble* F.

Nous pouvons encore supposer que l'ensemble F contient une racine réelle μ, telle que $a < \delta \leqslant \mu < a_1$ (cf. l'énoncé V), la partie réelle d'aucune racine de F n'étant pas comprise entre μ et a_1, dans le cas contraire, en effet, l'énoncé VIII résulte immédiatement de l'énoncé VI. En tenant compte d'une transformation T (§ 2) on peut donc admettre que l'équation (2) possède des racines imaginaires $\pm i$ et $\alpha \pm i\beta$ $(\alpha < 0)$, des racines

négatives $\nu_1, \ldots, \nu_s$, δ et μ, telles que $\nu_1 < \ldots < \nu_s < \alpha < \delta \leqslant \mu$ et des racines positives $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$, telles que $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_r$. Toutes les autres racines de (2) (s'il en existe) ont leurs parties réelles comprises entre δ et μ. Pour établir l'énoncé VIII il suffit d'après le Théorème I de montrer que les équations:

$$X = \left| \begin{matrix} e^{\nu_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\nu_s x_1} \\ e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 \\ e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1 \\ e^{\delta x_1} \\ \vdots \\ e^{\mu x_1} \\ \cos x_1 \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_r x_1} \end{matrix} \right| = 0, \quad Y = \left| \begin{matrix} e^{\nu_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\nu_s x_1} \\ e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 \\ e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1 \\ e^{\delta x_1} \\ \vdots \\ e^{\mu x_1} \\ \sin x_1 \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_r x_1} \end{matrix} \right| = 0$$

possèdent un système de racines communes, tel que $x_i \neq x_k$ et qui n'annule pas le déterminant obtenu en supprimant une colonne quelconque de la matrice:

$$M = \left\Vert \begin{matrix} e^{\nu_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\nu_s x_1} \\ e^{\alpha x_1} \cos \beta x_1 \\ e^{\alpha x_1} \sin \beta x_1 \\ e^{\delta x_1} \\ \vdots \\ e^{\mu x_1} \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_r x_1} \end{matrix} \right\Vert .$$

Posons $x_2 = q_2 x_1$, $x_3 = q_3 x_1, \ldots, x_r = q_r x_1$ $(1 < q_2 < q_3 < \ldots < q_r)$ et $x_{r+2} = p_2 x_{r+1}, x_{r+3} = p_3 x_{r+1}, \ldots, x_{r+s} = p_s x_{r+1}$ $(1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_s)$ en supposant que $x_{r+s+1}, x_{r+s+2}, \ldots, x_{n-1}$ soient fixés nous allons considérer X et Y comme fonctions des variables x_1 et x_{r+1}. En développant X et Y d'après la formule de LAPLACE suivant

les mineurs d'ordre s formés avec les éléments des s premières colonnes des déterminants X et Y on aura:

$$
(11)\quad \begin{cases}
\pm X = \begin{vmatrix} e^{\gamma_1 x_1} \dots e^{\gamma_1 q_r x_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e^{\gamma_r x_1} \dots {}^{\gamma_r q_r x_1} \end{vmatrix} X_1 + \begin{vmatrix} \cos x_1 \dots \cos q_r x_1 \\ e^{\gamma_2 x_1} \dots e^{\gamma_2 q_r x_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e^{\gamma_r x_1} \dots e^{\gamma_r q_r x_1} \end{vmatrix} Z + \dots \\
\pm Y = \begin{vmatrix} e^{\gamma_1 x_1} \dots e^{\gamma_1 q_r x_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e^{\gamma_r x_1} \dots e^{\gamma_r q_r x_1} \end{vmatrix} Y_1 + \begin{vmatrix} \sin x_1 \dots \sin q_r x_1 \\ e^{\gamma_2 x_1} \dots e^{\gamma_2 q_r x_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e^{\gamma_r x_1} \dots e^{\gamma_r q_r x_1} \end{vmatrix} Z + \dots
\end{cases}
$$

où X_1 est le déterminant:

$$
X_1 = \begin{vmatrix}
e^{\nu_1 x_{r+1}} & e^{\nu_1 p_2 x_{r+1}} & e^{\nu_1 p_s x_{r+1}} & e^{\nu_1 x_{r+s+1}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
e^{\nu_s x_{r+1}} & e^{\nu_s p_2 x_{r+1}} & e^{\nu_s p_s x_{r+1}} & e^{\nu_s x_{r+s+1}} \\
e^{\alpha x_{r+1}} \cos \beta x_{r+1} & e^{\alpha p_2 x_{r+1}} \cos \beta p_2 x_{r+1} & e^{\alpha p_s x_{r+1}} \cos \beta p_s x_{r+1} & e^{\alpha x_{r+s+1}} \cos \beta x_{r+s+1} \\
e^{\alpha x_{r+1}} \sin \beta x_{r+1} & e^{\alpha p_2 x_{r+1}} \sin \beta p_2 x_{x+1} & e^{\alpha p_s x_{r+1}} \sin \beta p_s x_{r+1} & e^{\alpha x_{r+s+1}} \sin \beta x_{r+s+1} \\
e^{\delta x_{r+1}} & e^{\delta p_2 x_{r+1}} & e^{\delta p_s x_{r+1}} & e^{\delta x_{r+s+1}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
e^{\mu x_{r+1}} & e^{\mu p_2 x_{r+1}} & e^{\mu p_s x_{r+1}} & e^{\mu x_{r+s+1}} \\
\cos x_{r+1} & \cos p_2 x_{r+1} & \cos p_s x_{r+1} & \cos x_{r+s+1}
\end{vmatrix}
$$

tandis que Y_1 se déduit de X_1 en y remplaçant dans la dernière ligne tous les cosinus par les sinus et que Z se déduit de Y_1 en y remplaçant la dernière ligne par $e^{\nu_1 x_{r+1}}, \dots, e^{\nu_1 p_s x_{r+1}}, e^{\nu_1 x_{r+s+1}} \dots$ Considérons l'ensemble des racines de (2) qui interviennent dans la définition de X_1 et de Y_1 c. à d. les racines $\nu_1, \dots, \nu_s$, $\alpha \pm i\beta$, $\delta, \dots, \mu$, $\pm i$. Il est clair que l'ensemble symétrique de celui-ci par rapport à l'axe imaginaire satisfait aux conditions du Théorème VII. Il résulte de la démonstration de ce théorème et de l'énoncé I que les équations (3) de cet énoncé, dans lesquelles on remplace $x_1, \dots, x_k$ par $x_{r+1}, x_{r+s+1}, \dots, x_{n-1}$ et les $y_i(x)$ par des intégrales de l'équation qui correspond à l'énoncé VII possèdent un système de solution tel que $x_l \neq x_k$ et que $x_{r+1} > 0$, $x_{r+s+1} < 0$ et $x_{r+s+2} > 0$, tandis que les valeurs absolues de ces trois nombres sont arbitrairement grandes. Or les équations (3) du Théorème I restent satisfaites lorsqu'on y change le signe

des parties réelles de toutes les racines de l'équation caractéristique pourvu que l'on change aussi les signes de tous les nombres x_i. On voit donc, en tenant encore compte des transformations T (cf. la fin du § 2) que les équations $X_1=0$ et $Y_1=0$ possèdent un système $x^0_{r+1}, x^0_{r+s+1}, x^0_{r+s+2}, \dots, x^0_{n-1}$ de racines communes, tel que $x^0_i \neq x^0_k$ et que $x^0_{r+1}<0$, $x^0_{r+s+1}>0$ et $x^0_{r+s+2}<0$, tandis que les valeurs absolues de ces trois nombres sont arbitrairement grandes. Nous allons voir qu'il est possible de choisir ce système de racines de manière qu'il n'annule pas Z. En développant Z par la formule de LAPLACE suivant les mineurs d'ordre s formés avec les éléments des s premières colonnes de Z on constate que Z ne s'annule pas lorsque x_{r+1} est négatif et assez grand en valeur absolue, pourvu que le mineur:

$$m=\begin{vmatrix} e^{\alpha x_{r+s+1}}\cos\beta x_{r+s+1} \\ e^{\alpha x_{r+s+1}}\sin\beta x_{r+s+1} \\ e^{\delta x_{r+s+1}} \\ \vdots \\ e^{\mu x_{r+s+1}} \\ e^{\gamma_1 x_{r+s+1}} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Or ce mineur ne s'annule pas lorsque x_{r+s+1} est positif et assez grand lorsque le mineur de m:

$$m'=\begin{vmatrix} e^{\alpha x_{r+s+2}}\cos\beta x_{r+s+2} \\ e^{\alpha x_{r+s+2}}\sin\beta x_{r+s+2} \\ e^{\delta x_{r+s+2}} \\ \vdots \\ e^{\mu x_{r+s+2}} \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas. Si l'on a $m'=0$, il suffit pour que m ne s'annule pas pour les grandes valeurs de x_{r+s+1} que l'on ait:

$$m''=\begin{vmatrix} e^{\alpha x_{r+s+2}}\cos\beta x_{r+s+2} \\ e^{\alpha x_{r+s+2}}\sin\beta x_{r+s+2} \\ e^{\delta x_{r+s+2}} \\ \vdots \\ e^{\gamma_1 x_{r+s+2}} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Or on peut choisir les nombres $x^0_{r+s+3}, \dots, x^0_{n-1}$ de manière que les égalités $m' = m'' = 0$ soient impossibles, du moins lorsque x_{r+s+2} est négatif et assez grand en valeur absolue. On a, en effet, pour $x_{r+s+2} \to -\infty$ les développements:

$$m' = e^{\alpha x_{r+s+2}}(P_1 \cos \beta x_{r+s+2} + Q_1 \sin \beta x_{r+s+2}) + \dots$$
$$m'' = e^{\alpha x_{r+s+2}}(P_2 \cos \beta x_{r+s+2} + Q_2 \sin \beta x)_{r+s+2}) + \dots$$

où P_1, Q_1, P_2 et Q_2 ne dépendent que de $x_{r+s+3}, \dots, x_{n-1}$ et où les termes non écrits sont d'ordre inférieur. On constate aisément que $P_1Q_2 - P_2Q_1$ ne s'annule pas identiquement, il est donc possible de choisir $x^0_{r+s+3}, \dots, x^0_{n-1}$ de manière que cette expression soit différente de zéro[16]) et notre assertion résulte alors immédiatement des développements ci-dessus. On peut aussi supposer que les nombres $x^0_{r+s+1}, \dots, x^0_{n-1}$ n'annulent pas le déterminant:

$$W_1 = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_{r+s+1}} \cos \beta x_{r+s+1} & e^{\alpha x_{r+s+3}} \cos \beta x_{r+s+3} & \\ e^{\alpha x_{r+s+1}} \sin \beta x_{r+s+1} & e^{\alpha x_{r+s+3}} \sin \beta x_{r+s+3} & \\ e^{\delta x_{r+s+1}} & e^{\delta x_{r+s+3}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ e^{\mu x_{r+s+1}} & e^{\mu x_{r+s+3}} & \end{vmatrix}.$$

En effet, W_1 ne s'annule pas lorsque x_{r+s+1} est > 0 et assez grand pourvu que le mineur de W_1 qui correspond à l'élément $e^{\mu x_{r+s+1}}$ et qui ne dépend que de $x_{r+s+3}, \dots, x_{n-1}$ ne s'annule pas, c'est ce que l'on peut bien supposer[16]).

Cela posé, nous considérons encore dans la partie du plan (x_1, x_{r+1}) où $x_1 > 0$ et $x_{r+1} < 0$ un rectangle $ABCD$ dont les côtés AB et CD sont très grands et parallèles à l'axe $0x_1$, tandis que les côtés BC et AD sont très petits et parallèles à l'axe $0x_{r+1}$. On suppose que l'ordonnée x_{r+1} du côté AB soit égale à x^0_{r+1}, tandis que l'ordonnée $\bar{x}_{r+1}$ du côté CD soit choisie de manière que X_1 ne s'annule pas pour $x_{r+1} = \bar{x}_{r+1}$, $x_{r+2} = x^0_{r+2}, \dots, x_{n-1} = x^0_{n-1}$. On trouve alors, tout pareillement comme dans la démonstration du théorème VI (§ 7) que lorsque le rectangle $ABCD$

---

[16]) En effet, il résulte des démonstrations des théorèmes V et VII que $x^0_{r+s+3} \dots x^0_{n-1}$ ne sont assujettis qu'à satisfaire à un certain nombre de conditions de la forme $H(x^0_{r+s+3} \dots x^0_{n-1}) \neq 0$.

est choisi dans la région où x_1 est assez grand et x_{r+1} assez petit les équations $X=0$ et $Y=0$ possèdent un système de racines communes dans le rectangle. Pour achever la démonstration il faut encore montrer que le système en question n'annule pas le déterminant W obtenu de la matrice M en y supprimant la colonne qui contient la variable x_{r+s+2}. Or on voit aisément que W ne s'annule pas lorsque $x_1 (x_1>0)$ et $x_{r+1} (x_{r+1}<0)$ sont assez grands en valeur absolue: il suffit de tenir compte de l'inégalité $W_1 \neq 0$, de développer W par la formule de LAPLACE suivant les mineurs d'ordre r formés avec les éléments de r premières colonnes de W et de développer ensuite le mineur N complémentaire du mineur:

$$\begin{vmatrix} e^{\gamma_1 x_1} \dots e^{\gamma_1 q_r x_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e^{\gamma_r x_1} \dots e^{\gamma_r q_r x_1} \end{vmatrix}$$

par la formule de LAPLACE suivant les mineurs d'ordre s formés avec les éléments des s premières colonnes de N.

§ 10. Nous allons maintenant remplacer les énoncés IV—VIII par un seul théorème plus géneral:

IX. *L'équation* (1) *est du type* S_{n-1} *lorsque l'équation caractéristique* (2) *possède au moins deux couples de racines imaginaires, pourvu que toutes ses racines soient simples et que les parties réelles de tous les couples des racines complexes soient distinctes entre elles* [71]).

Considérons, en effet, les deux couples de racines imaginaires, soit $\alpha \pm i\beta$ et $\alpha' \pm i\beta'$ $(\alpha<\alpha')$ tels que l'équation (2) ne possède pas de racines imaginaires dont les parties réelles seraient plus petites que α ou plus grandes que α'. Si l'équation (2) ne possède pas de racines (réelles ou imaginaires) dont les parties réelles seraient comprises entre α et α' ou s'il existe un troisième couple $\alpha'' \pm i\beta''$ des racines imaginaires $[\alpha<\alpha''<\alpha']$ tel que l'équation ne possède pas de racines dont les parties réelles seraient comprises entre α et α' ou bien entre α'' et α

---

17) Il résulte de la démonstration que les restrictions relatives à la simplicité des racines ainsi qu'à l'inégalité de leurs parties réelles sont très probablement superflues.

nous sommes évidemment dans les cas des énoncés IV ou VI (ou bien des ceux que l'on déduit de IV ou VI en y remplaçant des racines par leurs symétriques par rapport à l'axe imaginaire). Dans le cas contraire ou bien l'équation (2) n'a qu'une seule racine dont la partie réelle est comprise entre α et α' et cette racine est réelle ou bien cette équation possède deux racines réelles, soit δ et μ, telles que $\alpha < \delta < \mu < \alpha'$, tandis qu'il n'existe pas de racines dont les parties réelles seraient comprises entre α et δ ainsi que entre μ et α': il est clair que nous sommes alors dans les cas des énoncés V, VII ou VIII (ou bien des ceux que l'on déduit de V ou de VII en y remplaçant des racines par leurs symétriques par rapport à l'axe imaginaire), le théorème IX est donc complètement établi.

§ 11. Nous supposerons dans ce § que $k = n-1$ *et que l'équation* (2) *possède un seul couple de racines imaginaires.* Le cas où $n = 3$ a été déjà examiné (§ 3): l'équation (1) est du type L_3, sauf dans le cas où la partie réelle des racines imaginaires est égale à la racine réelle, alors l'équation (1) est du type S_3. Examinons maintenant le cas où $n = 4$. On a l'énoncé suivant:

X. *Lorsque* $n = 4$ *et que l'équation* (2) *possède un seul couple de racines imaginaires, tandis que l'une des racines réelles et plus grande et l'autre plus petite que la partie réelle des racines imaginaires l'équation* (1) *est du type* L_3.

On peut supposer que les racines de l'équation caractéristique sont 0, $\alpha \pm i\beta$, $\gamma\,(0 < \alpha < \gamma)$. Si l'équation (1) était du type S_3 il existeraient, d'après l'énoncé I, des nombres $x_1, x_2, x_3 (x_i \neq x_k)$ tels que l'on aurait:

$$\text{(12)} \qquad \begin{vmatrix} \vdots \\ e^{\alpha x_1}\cos\beta x_1 \\ e^{\gamma x_1} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \vdots \\ e^{\alpha x_1}\sin\beta x_1 \\ e^{\gamma x_1} \end{vmatrix} = 0 .$$

On peut écrire ces équations sous la forme suivante:

$$A\,e^{\alpha x_1}\cos\beta x_1 + B_1 + C_1\,e^{\gamma x_1} = 0$$
$$A\,e^{\alpha x_1}\sin\beta x_1 + B_2 + C_2\,e^{\gamma x_1} = 0$$

où les coefficients A, B_1, C_1, B_2, C_2 ne dépendent que de x_2 et de x_3.

En éliminant entre ces deux équations $\cos\beta x_1$ et $\sin\beta x_1$ on obtient l'équation:

$$B_1^2+B_2^2+2(BC_1+B_2C_2)\,e^{\gamma x_1}-A^2e^{2\alpha x_1}+(C_1^2+C_2^2)\,e^{2\gamma x_1}=0$$

et il est clair que chacune des deux suites:

$$B_1^2+B_2^2,\ 2(B_1C_1+B_2C_2),\ -A^2,\ C_1^2+C_2^2$$
$$B_1^2+B_2^2,\ -A^2,\ 2(B_1C_1+B_2C_2),\ C_1^2+C_2^2$$

présente deux changements de signe, donc d'après la règle de DESCARTES généralisée (cf. le renvoi) [4]) l'équation en x:

$$B_1^2+B_3^2+2(B_1C_1+B_2C_2)\,e^{\gamma x}-A^2\,e^{2\alpha x}+(C_1^2+C_2^2)\,e^{2\gamma x}=0$$

possède deux racines au plus. Or il résulte des équations (12) que l'équation en x possède 3 racines distinctes: $x=x_1$ $x=x_2$ et $x=x_3$. Nous aboutissons ainsi à une contradiction qui montre que l'hypothèse: l'équation (1) est du type S_3 est inadmissible.

Lorsque $n>4$ l'équation est-elle toujours du type S_{n-1}? cela me parait probable, mais je n'ai pu établir à ce sujet que le résultat partiel suivant:

XI. *p et q étant des entiers positifs ou nuls, tels que $p+q=n-2$ on peut construire, pour tout $n>4$, une équation* (1) *du type S_{n-1} dont l'équation caractéristique* (2) *possède un seul couple, soit $a\pm i\beta$, des racines imaginaires, p racines réelles inférieures à a et q racines réelles supérieures à ce nombre. Ce résultat subsiste pour $n=4$ lorsque $p=0$ et $q=2$ ou $p=2$ et $q=0$* (cf. l'énoncé X).

Dans la démonstration de cette proposition nous allons utiliser le lemme suivant:

Lemme 4. *Lorsque n est un entier $\geqslant 4$ et $r<[2(n-3)]^{-1}$ on peut trouver des entiers positifs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ tels que l'équation en t:*

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots\ldots & 1 & 1 \\ e^{-rx_1} & \ldots\ldots & e^{-rx_{n-2}} & 1 \\ e^{-2rx_1} & \ldots\ldots & e^{-2rx_{n-2}} & 1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ e^{-(n-3)rx_1} & \ldots & e^{-(n-3)rx_{n-2}} & 1 \\ t^{x_1} & \ldots\ldots\ldots & t^{x_{n-2}} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

possède une racine négative et plus grande que 1 *en valeur absolue.*

Posons $x_{n-2}=1$, $x_{n-3}=2, \dots, x_2=n-3$, en ce qui concerne x_1 il sera choisi pair lorsque n est impair et impair lorsque n est pair et en outre suffisamment grand pour que l'on ait:

$$e^{-rx_2} - e^{-rx_1} > 1 - e^{-rx_2} \tag{14}$$

ce qui est possible car l'on a $2e^{-rx_2}>1$. Remarquons d'abord que tous les mineurs d'ordre $(n-2)$ obtenus en supprimant la dernière ligne et une colonne du déterminant (13) sont positifs (loc. cit. sous[3])), il en résulte que lorsque $t \to -\infty$ le premier membre de (13) devient négatif. En désignant par $M_1, \dots, M_{n-2}$, M_{n-1} les mineurs (tous positifs) relatifs aux éléments $t^{x_1}, \dots, t^{x_{n-2}}, 1$ de la dernière ligne du déterminant on trouve sans peine que pour $t=-1$ ce déterminant est égal à $-M_1+M_2+\dots+M_{n-1}$. Pour établir le lemme il suffit donc de montrer que l'on a $M_1<M_{n-1}$, or M_1 et M_{n-1} ce sont des déterminants de VANDERMONDE, donc:

$$M_1 = \prod_{i,k=2,\dots,n-1} |e^{-rx_i} - e^{-rx_k}| \underset{(i<k)}{} \quad (\text{on pose } x_{n-1}=0),$$

$$M_{n-1} = \prod_{i,k=1,\dots,n-2} |e^{-rx_i} - e^{-rx_k}| \underset{(i<k)}{}.$$

Cela posé, l'inégalité (14) entraine les suivantes:

$$|e^{-rx_i} - e^{-rx_{n-1}}| < |e^{-rx_i} - e^{-rx_1}| \quad (i=2,3,\dots,n-2)$$

d'où il s'ensuit bien que $M_1<M_{n-1}$.

Remplaçons maintenant dans c'équation (13) t par e^z où z est la variable complexe. Puisque l'équation (13) possède une racine τ négative et plus grande que 1 en valeur absolue l'équation en z aura les racines $\log \tau = \log|\tau| \pm i\pi$ dont les parties réelles sont positives. On constate donc que si les racines de l'équation caractéristique sont $-(n-3)r$, $-(n-2)r, \dots, -r, 0$ et $\log|\tau| \pm i\pi$ les deux équations:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ e^{-rx_1} \\ \vdots \\ e^{-(n-3)rx_1} \\ |\tau|^{x_1}\cos \pi x_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ e^{-rx_1} \\ \vdots \\ e^{-(n-3)rx1} \\ |\tau|^{x_1}\sin \pi x_1 \end{vmatrix} = 0$$

possèdent des racines communes en $x_1, \dots, x_{n-1}$ $(x_i \neq x_k, x_{n-1} = 0)$. On voit d'ailleurs, d'après ce qui précède, qu'aucun mineur d'ordre $(n-2)$ de la matrice:

$$\left| \begin{matrix} 1 \\ e^{-rx_1} \\ \vdots \\ e^{-(n-3)rx_1} \end{matrix} \right|$$

ne s'annule pas pour ces valeurs de $x_1, \dots, x_{n-1}$ et ceci achève la démonstration dans le cas où $p = n-2$. Le cas où $p=0$ se ramène au cas précedent par une transformation T. Supposons maintenant que $1 < p < n-2$ $(n > 4)$. Nous pouvons admettre que les racines de l'équation caractéristique sont $-(p-1)r, -(p-2)r, \dots, -r, 0, \log|\tau| \pm i\pi$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ où $r = [2(p-1)]^{-1}$, où τ est la racine de l'équation (13) dans laquelle on a remplacé n par $(p+2)$ et où $0 < \log|\tau| < \gamma_1 < \dots < \gamma_s$. Il faut montrer que les équations:

$$X = \left| \begin{matrix} 1 \\ e^{-rx_1} \\ \vdots \\ e^{-(p-1)rx_1} \\ |\tau|^{x_1} \cos \pi x_1 \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_s x_1} \end{matrix} \right| = 0 \quad Y = \left| \begin{matrix} 1 \\ e^{-rx_1} \\ \vdots \\ e^{-(p-1)rx_1} \\ |\tau|^{x_1} \sin \pi x_1 \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_s x_1} \end{matrix} \right| = 0$$

possèdent un système de racines communes $(x_i \neq x_k)$ qui n'annule pas un des mineurs d'ordre $(n-2)$ de la matrice:

$$M = \left\| \begin{matrix} 1 \\ e^{-rx_1} \\ \vdots \\ e^{-(p-1)rx_1} \\ e^{\gamma_1 x_1} \\ \vdots \\ e^{\gamma_s x_1} \end{matrix} \right\| .$$

La dernière propriété est évidente car aucun mineur de M ne s'annule pas lorsque $x_i \neq x_k$ (cf. le commencement du § 4). Pour établir l'existence des racines communes nous emploierons encore la méthode du § 7. Posons donc

$$x_2 = p_2 x_1, \ldots, x_s = p_s x_1 (1 < p_2 < \ldots < p_s).$$

Il résulte de ce qui précède qu'il existent des nombres $x^0_{s+1}, \ldots, x^0_{n-1}$ qui annulent simultanément les deux mineurs:

$$Y_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ e^{-rx_{s+1}} \\ \vdots \\ e^{-(p-1)rx_{s+1}} \\ |\tau|^{x_1} \sin \pi x_{s+1} \end{vmatrix} \qquad X_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ e^{-rx_{s+1}} \\ \vdots \\ e^{-(p-1)rx_{s+1}} \\ |\tau|^{x_1} \cos \pi x_{s+1} \end{vmatrix}.$$

Posons $x_{s+2} = x^0_{s+2}$, $x_{s+3} = x^0_{s+3}, \ldots, x_{n-1} = x^0_{n-1}$ et considérons dans la partie du plan (x_1, x_{s+1}) où $x_{s+1} > 0$ et $x_1 > x_{s+1}$ un rectangle $ABCD$ dont les côtés AB et CD sont très grands et parallèles à l'axe $0x_1$, tandis que les côtés BC et DA sont petits et parallèles à l'axe $0x_{s+1}$. En supposant que l'ordonnée x_{s+1} du côté AB soit égale à x^0_{s+1} et que celle du côté CD soit choisie de manière que l'on ait $X_1 \neq 0$ le long de ce côté et en développant X et Y d'après la formule de LAPLACE suivant les mineurs d'ordre s formés avec les éléments des s premières colonnes de ces déterminants on constate comme au § 7 que les équations $X=0$ et $Y=0$ possèdent bien des racines communes dans le rectangle $ABCD$.

Il reste à traiter le cas où $p=1$, or ce cas se ramène à celui où $p=n-3$ par une transformation T, le théorème XI est donc complètement établi.

§ 12. Je supposerai maintenant que k a une valeur quelconque et je me contenterai d'établir quelques propositions particulières qui suggèrent cependant des présomptions relatives au cas plus généraux.

XII. *Si l'équation* (2) *possède* $(p+1)$ *couples des racines imaginaires conjuguées et si les rapports des leurs parties imaginaires sont tous rationnels l'équation* (1) *est du type* S_{n-p} $(p \leqslant \frac{1}{2}n - 1)$.

Soient $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_{p+1} \pm i\beta_{p+1}$ les $p+1$ couples en question. Il résulte de nos hypothèses qu'il existent des entiers $l_1, l_2, \dots, l_{p+1}$, tels que l'on a:

$$\frac{l_1}{\beta_1} = \frac{l_2}{\beta_2} = \dots = \frac{l_{p+1}}{\beta_{p+1}} = r.$$

Posons $x_1 = r\pi$, $x_2 = 2r\pi, \dots, x_{n-p} = (n-p)r\pi$.

D'après l'énoncé I il suffit de montrer que les équations:

$$k_1 e^{\alpha_1 x_1} \sin \beta_1 x_1 + \dots + k_{n-p} e^{\alpha_1 x_{n-p}} \sin \beta_1 x_{n-p} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$k_1 e^{\alpha_{p+1} x_1} \sin \beta_{p+1} x_1 + \dots + k_{n-p} e^{\alpha_{p+1} x_{n-p}} \sin \beta_{p+1} x_{n-p} = 0$$

ainsi que les $(n-p-1)$ autres équations linéaires et homogènes par rapport aux k_i sont satisfaites par des constantes k_i non toutes nulles. Or pour les valeurs considérées des x_i on a $\sin \beta_s x_t = 0$ $(s = 1, \dots, p+1, t = 1, \dots, n-p)$, il suffit donc de trouver des constantes $k_1, \dots, k_{n-p}$, non toutes nulles et qui vérifient $(n-p-1)$ équations linéaires et homogènes, c'est ce qui est toujours possible.

Il résulte du théorème IX que dans le cas particulier où $p=1$ la condition: „les rapports des parties imaginaires sont tous rationnels" est superflue, il me semble probable qu'il en est de même quelque soit p. Nous allons voir que cette hypothèse est exacte dans un cas particulier. Considérons, en effet, l'équation $y^{(n)} + Ay = 0$, où A est une constante positive et où n est pair, son équation caractèristique possède n couples des racines imaginaires, donc d'après l'hypothèse énoncée elle devrait appartenir au type $S_{1/2 n+1}$, or nous avons même un énoncé plus général:

XIII. *L'équation* $y^{(n)} + A(x)y = 0$, *où* n *est pair et où* $A(x)$ *est continue et supérieure à une constante positive est du type* $S_{1/2 n+1}$.

Remarque. M. J. Mikusiński a réussi à compléter très heuresement ce théorème, il a établi, en effet, dans l'article: „Sur le problème d'interpolation des intégrales des équations différentielles linéaires", publié dans les Annal. de la Soc. Pol. de Math. (**19**), que si $A(x) > 0$ l'équation de l'énoncé XIII est du type $L_{1/2 n}$.

Dans la démonstration je vais utiliser le lemme suivant:

Lemme. *Si $A(x)$ est continue et $\neq 0$ dans l'intervalle fermé (a,b) alors toute intégrale de l'équation $y^{(n)}+A(x)y=0$ (n pair) qui ne change pas de signe dans (a,b) et qui s'annule en l'un des points a et b au moins possède au plus $\frac{1}{2}n-1$ zéros [d'ordre pair de multiplicité) comptés simplement à l'intérieur de (a,b).*

Ce lemme résulte de la remarque suivante, conséquence de la formule de TAYLOR: si $f(x)$ possède la dérivée seconde et n'est pas constante dans aucun intervalle il existe dans le voisinage arbitrairement restreint à gauche ou à droite d'un point où $f(x)$ atteint son maximum (minimum) des points où l'on a $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$). Il s'ensuit de la remarque précedente que si l'intégrale $y(x)$ possède s zéros (comptés simplement) à l'intérieur de (a,b) $y''(x)$ change de signe $(2s-1)$ fois au moins dans (a,b). En pour suivant le même raisonnement on voit que $y^{(4)}(x)$ y change $(2s-3)$ fois au moins son signe... et que $y^{(n)}(x)$ y change de signe $(2s-n+1)$ fois au moins. D'après nos hypothèses il faut donc que l'on ait $2s-n+1 \leqslant 0$ et $s \leqslant \frac{1}{2}n-1$.

Or, M. J. Mikusiński a montré[18]) que si n est pair et si $A(x) \geqslant m > 0$ tout intervalle dont la longueur dépasse un nombre qui ne dépend que de n et de m contient des zéros de toute intégrale de l'équation $y^{(n)}+A(x)y=0$. Il résulte de ce théorème et du lemme ci-dessus[19]) qu'il existe un nombre $d=d(n,m)$ tel que toute intégrale de l'équation (où $A(x) \geqslant m > 0$) change de signe dans tout intervalle dont la longueur est supérieure à d. Considérons maintenant un intervalle quelconque (α,β), tel que $\beta-\alpha>d$ et soit K la borne supérieure des longueurs des intervalles contenus dans (α,β) et tels qu'il existe une intégrale de l'équation qui ne change pas de signe dans l'intervalle en question. On a évidemment $K<\beta-\alpha$. Soit $y_n(x)$ une intégrale qui ne change pas de signe dans l'intervalle

---

[18]) „Sur l'inégalité différentielle $|f^{(n)}(x)| \geqslant m\,|f(x)|$", Comptes Rendus des séances de l'Acad. des Sciences de Paris, 11 février 1946.

[19]) Au lieu du lemme on pourrait utiliser une proposition générale de M. Mikusiński.

$a_n \leqslant x \leqslant b_n (\alpha \leqslant a_n < b_n \leqslant \beta)$, $b_n - a_n > K - n^{-1}$ et qui satisfait à la condition:

$$\operatorname{Max}[|y_n(a_n)|, |y'_n(a_n)|, \dots, |y_n^{(n-1)}(a_n)|] = 1.$$

Il existe une suite partielle n_i telle que $a_{n_i} \to a$, $b_{n_i} \to b$, $b - a = K$, $\alpha \leqslant a < b \leqslant \beta$ (les deux signes d'égalité sont exclus à la fois), $y_{n_i}(a_{n_i}) \to z_0, \dots, y_{n_i}^{(n-1)}(a_{n_i}) \to z_{n-1}$. On a

$$|z_i| \leqslant 1 \text{ et } \operatorname{Max}|z_i| = 1 \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Des conditions initiales $z(a) = z_0$, $z'(a) = z_1, \dots, z^{(n-1)}(a) = z_{n-1}$ déterminent univoquement une intégrale $z(x)$ et il résulte du fait qu'une intégrale est une fonction continue des conditions initiales[20]) que $z(x)$ ne change pas de signe dans l'intervalle (a,b) de longueur K. On peut évidemment supposer que cette „intégrale extrêmale" est positive ou nulle dans (a,b). Il est clair que l'intégrale $z(x)$ s'annule en celui des points a et b qui est situé à l'intérieur de (α,β) [$z(x)$ s'annule en a et en b lorsque $\alpha < a < b < \beta$]. Désignons par $x_1, x_2, \dots, x_l$ les zéros de $z(x)$ contenus à l'intérieur de (a,b). Si l'équation $y^{(n)} + A(x)y = 0$ est du type L_k et si $l \leqslant k - 2$ il existe une intégrale $u(x)$ qui est positive aux points $a, x_1, \dots, x_l, b$. Il existe donc un nombre positif δ tel que l'intégrale $z^*(x) = z(x) + \varepsilon u(x)$ est positive dans les intervalles $a \leqslant x < a + \delta$, $x_i - \delta < x < x_i + \delta$ $(i = 1, 2, \dots, l)$, $b - \delta < x \leqslant b$ et cela quelque soit $\varepsilon > 0$. Dans les parties de (a,b) qui n'appartiennent pas aux intervalles précédentes $z(x)$ a une borne inférieure positive, donc $z^*(x)$ y est positive aussi pourvu que $\varepsilon > 0$ soit assez petit. Ainsi donc l'intégrale $z^*(x)$ serait positive dans un intervalle contenu dans (a,b) et dont la longueur surpasserait K, contrairement à la définition de ce nombre. Cette contradiction montre que $l \geqslant k - 1$, or d'après le lemme on a $l \leqslant \frac{1}{2}n - 1$, il en résulte que $k \leqslant \frac{1}{2}n$ et ceci établit la proposition.

Les résultats de la plupart des théorèmes précédents sont négatifs: on constate qu'il n'est pas toujours possible de construire des intégrales satisfaisantes aux conditions données, voici maintenant quelques proposition affirmatives:

---

[20]) Cf. p. ex. E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, p. 142—153.

XIV. *Supposons que l'équation caractéristique* (2) *possède deux groupes de racines, chaque groupe comprenant* $(k-1)$ *couples (comptés avec leurs ordres de multiplicité) de racines imaginaires dont les parties imaginaires sont toutes égales en valeur absolue*[21]). *Si le rapport des parties imaginaires des racines appartenant aux groupes différentes est irrationnel l'équation* (1) *est du type* L_k.

Soient $a_1 \pm i\beta_1, a_2 \pm i\beta_1, \ldots, a_{k-1} \pm i\beta_1$ les racines du 1 groupe. Si l'équation (1) était du type S_k il existeraient, d'après le théorème I, des constantes $k_1, k_2, \ldots, k_k$ non toutes nulles et des nombres $x_1, \ldots, x_k (x_i \mp x_j)$ tels que l'on aurait:

$$(15)\quad \begin{aligned} &k_1 e^{\alpha_1 x_1} \sin \beta_1 x_1 + \ldots + k_k e^{\alpha_1 x_k} \sin \beta_1 x_k = 0 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &k_1 e^{\alpha_{k-1} x_1} \sin \beta_1 x_1 + \ldots + k_k e^{\alpha_{k-1} x_k} \sin \beta_1 x_k = 0 \\ &k_1 e^{\alpha_{k-1} x_1} \cos \beta_1 x_1 + \ldots + k_k e^{\alpha_{k-1} x_k} \cos \beta_1 x_k = 0. \end{aligned}$$

On peut d'ailleurs supposer que $x_k = 0$ (cf. la remarque à la fin du § 2). Il résulte des $(k-1)$ premières équations (15) que l'équation en u:

$$k_1 \sin \beta_1 x_1 e^{x_1 u} + \ldots + k_{k-1} \sin \beta_1 x_{k-1} e^{x_{k-1} u} = 0$$

possède $(k-1)$ racines: $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité), or il s'ensuit de la règle de DESCARTES généralisée (cf. loc. cit. sous[4])) que l'équation en u possède au plus $(k-2)$ racines réelles, à moins que les coefficients $k_1 \sin \beta_1 x_1, \ldots, k_{k-1} \sin \beta_1 x_{k-1}$ ne soient pas tous nuls, on a donc $k_s \sin \beta_1 x_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots (k-1))$. Supposons maintenant que les coefficients de i des racines du 2 groupe soient tous égaux à $\pm \beta_2$, on trouve tout pareillement que $k_s \sin \beta_2 x_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots (k-1))$. Si l'on avait $\sin \beta_1 x_s = 0$ et $\sin \beta_2 x_s = 0$ simultanément il en résulterait que le rapport $\beta_1 : \beta_2$ serait rationnel, en contradiction avec notre hypothèse. On a donc: $k_1 = 0,\ k_2 = 0, \ldots, k_{k-1} = 0$. Il résulte alors de la dernière des équations (15) que l'on a aussi $k_k = 0$. Nous aboutissons ainsi à une contradiction avec le fait que les constantes k_l ne sont pas toutes nulles, ainsi donc l'équation (1) est bien du type L_k.

---

[21]) Elle peut avoir aussi d'autres racines.

Les conditions du théorème XIV sont vérifiées, par exemple, dans le cas de l'équation $y^{(8)}+y=0$ (avec $k=3$), on trouve ainsi que cette équation est du type L_3 (d'après l'énoncé XIII elle est du type S_5 et d'après le résultat cité de M. Mikusiński elle est du type L_4).

XV. *Si l'équation caractéristique* (2) *possède k racines réelles (comptées en tenant compte de leurs ordres de multiplicité) l'équation* (1) *est du type* L_k.

Soient $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ les racines réelles que nous supposerons simples. Si l'équation (1) était du type S_k il existeraient, d'après l'énoncé I, des constantes $k_1, \ldots, k_k$ non toutes nulles et des nombres $x_1, \ldots, x_k$ $(x_i \neq x_s)$ tels que l'on aurait:

$$k_1 e^{\gamma_i x_1} + k_2 e^{\gamma_i x_2} + \ldots + k_k e^{\gamma_i x_k} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

donc le déterminant:

$$\begin{vmatrix} e^{\gamma_1 x_1} \ldots e^{\gamma_1 x_k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e^{\gamma_k x_1} \ldots e^{\gamma_k \gamma_k} \end{vmatrix}$$

devrait s'annuler, c'est ce qui est cependant impossible (cf. le commencent du § 4). Le cas où certaines parmi les racines réelles seraient multiples se traite d'une manière analogue (cf. le § 4).

ON A PROBLEM OF M. F. LEJA

By Zygmunt Zahorski (Kraków)

M. F. Leja put the following problem [Ann. de la Soc. Pol. de Math. t. **XVIII**, p. 172, 1, (1945) and Interm. des Rech. Math. t. **2**, fasc. 5, Janvier 1946 qu. 0389, p. 5]: a closed set C on the complex plan and a point $z_0 \epsilon C$ display of the following property: the transfinite diameter of the set $C \cdot \{|z-z_0| \leqslant \delta\}$ is positive for every $\delta > 0$. A sequence of polynomials $P_n(z)$ of degree n is bounded, $|P_n(z)| < M$, for every $z \epsilon C$ and every n. Does a number $\delta(\varepsilon) > 0$ (and $M_1 < +\infty$) exist, for every $\varepsilon \epsilon (0,1)$, such, that $|P_n(z)(1-\varepsilon)^n| < M_1$ for every z fulfilling $|z-z_0| < \delta(\varepsilon)$ and every n?

When C is a continuum, the answer is affirmative (F. Leja: Math. Ann. t. **108**, 1933, p. 520). From the quoted paper we follow more, namely: the theorem about the existence of the number $\delta(\varepsilon)$ with the properties above named remains valid, when $|P_n(z)| < M(z)$ on a set $C_1 \subset C$, 0 being the point of density of the set of distances of the points of C_1 from z_0; the finite function $M(z)$ does not need to be bounded. The theorem in question has been used in the construction of the Green's function for an domain, the border of which is composed of continuums (F. Leja: Ann. de la Soc. Pol. de Math. t. **XII**, 1933, p. 57—71). The construction can be applied to borders with one — point components, but fulfilling the above — named condition of density; it could also be applied to borders, which fulfil the hypothesis, named in the formulation of the problem (for every $z_0 \epsilon C$), if the answer were affirmative.

I shall prove, that *the answer is a negative one*. It does not (possible) exclude the possibility of a construction of Green's

function, even of such a construction, as that of M. Leja in Ann. Soc. Pol. t. **XII**, but the proof requires a change. It is possible, too, that the counterexample I give cannot be obtained for the polynomials, used in M. Leja's construction of the Green's function, but these problems, together, with that, concerning the existence of the Green's function, I leave opened.

Lemma. *$\{l_n\}$ being a sequence of positive numbers, $l_n<1$, $n=1,2,\ldots$, a sequence of natural numbers $\{m_n\}$, $m_{n+1}>m_n$, exists, such, that m_n depends of $n, l_1, l_2, \ldots, l_n$ only, denoting $2^{-m_n}=a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant 1$ and for every k*

$$(*) \qquad l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \ldots l_{k-1}^{\alpha_{k-1}} l_k^{\alpha_k+\alpha_{k+1}+\cdots} > \frac{1}{2}.$$

Proof. We define by means of induction a sequence of natural numbers m_n in the following manner:

m_1 is the smallest natural number, fulfilling the condition:

$$(1) \qquad 2^{m_1} \geqslant 4 \lg_2 \frac{1}{l_1}.$$

$m_k (k>1)$, is the smallest natural number, fulfilling the conditions:

$$(2) \qquad 2^{m_k} \geqslant 2^{k+1} \lg_2 \frac{1}{l_k},$$

$$(3) \qquad m_k > m_{k-1}.$$

From (1), (2), (3) it follows, that m_k depends on $k, l_k, l_{k-1}, \ldots, l_1$ only. We shall prove, that the sequence $\{m_n\}$ fulfils all the conditions of the lemma. The a_n fulfil

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_n}} \leqslant \sum_{m=m_1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{2}{2^{m_1}} \leqslant 1$$

according to (3), and likewise

$$(4) \qquad a_k + a_{k+1} + \ldots \leqslant \sum_{m=m_k}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{2}{2^{m_k}} \leqslant \frac{1}{-2^k \lg_2 l_k}$$

(5) $$2a_n = \frac{2}{2^{m_n}} \leqslant \frac{1}{-2^n \lg_2 l_n}$$

according to (1), (2), and hence, as $l_n \in (0,1)$

$$l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \dots l_{k-1}^{\alpha_{k-1}} l_k^{\alpha_k+\alpha_{k+1}+\dots} > l_1^{2\alpha_1} l_2^{2\alpha_2} \dots l_{k-1}^{2\alpha_{k-1}} l_k^{\alpha_k+\alpha_{k+1}+\dots} \geqslant$$

$$\geqslant l_1^{-\frac{1}{2\lg_2 l_1}} l_2^{-\frac{1}{2^2\lg_2 l_2}} \dots l_k^{-\frac{1}{2^k \lg_2 l_k}} = \prod_{n=1}^{k} 2^{-\frac{1}{2^n \lg_2 l_n}\cdot \lg_2 l_n} = 2^{-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n}} >$$

$$> 2^{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2},$$

according to (4), (5), q. e. d.

The construction of the set C and of the sequence of polynomials $\{P_{k_n}(z)\}$ of degree k_n $(n=1,2,\dots)$.

We choose an arbitrary positive number $a > \frac{19}{8}$ and we define, for an arbitrary sequence $\{l_n\}$, $l_n \in (0,1)$, $n=1,2,\dots$, a sequence of numbers m_n and $a_n = 2^{-m_n}$, after the lemma, where m_n depends only on $n, l_1, l_2, \dots, l_n$, and a sequence of numbers

(6) $$r_n = r(n, l_1, l_2, \dots, l_n) = \min(l_n, a^{-\alpha_n^{-1}}),$$

then a sequence of polynomials (in the variable z)

(7) $$\begin{aligned} Q_n(z) &= Q(n, l_1, l_2, \dots, l_n, z) = \\ &= z(z-a)^{s_{n,0}}(z-4l_1)^{s_{n,1}}\dots(z-4l_n)^{s_{n,n}} \end{aligned}$$

where $s_{n,i} = 2^{m_n - m_i}$, $i=1,2,\dots,n$, $s_{n,0} = 2^{m_n}$; m_i depending only on $i, l_1, l_2, \dots, l_i$, Q_n depends only on $n, l_1, l_2, \dots, l_n$, and besides

(8) $$\frac{s_{n,i}}{s_{n,0}} = \alpha_i .$$

We define a sequence of numbers $R_n = R(n, l_1, l_2, \dots, l_n) > 0$ such, that

(9) $$|Q_n(z)| \leqslant 1 \text{ for every } |z| \leqslant 5R_n$$

and R_n is the greatest number with this property. It is possible, for $Q_n(0) = 0$ according to (7), and R_n depends only on the

coefficients and on the degree of the polynomial $Q_n(z)$ and so only on $n, l_1, l_2, \ldots, l_n$.

In particular, we define by means of induction a sequence of numbers $l_n \in (0,1)$, putting:

(10) $$l_1 = \frac{1}{8},$$

(11) $$l_k = \min\left(\frac{l_{k-1}}{2}, R_1, R_2, \ldots, R_{k-1}\right) \text{ for every } k>1.$$

It is easy to prove (by induction) that $l_n > 0$; besides, it follows from (11), (6), that

(12) $$\lim_{n\to\infty} l_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

We denote with K_n a circle

(13) $$|z-4l_n| \leqslant r_n$$

the sequence $\{l_n\}$ being chosen as above ((10), (11)), and we put $z_0 = 0$,

(14) $$C = [0] + \sum_{n=1}^{\infty} K_n.$$

It follows from (12), that C is a *closed set*. The *transfinite diameter* of the circle being *positive*, C and z_0 *fulfil the conditions of the problem.* The sequence $\{l_n\}$ being defined, as above, we put

(15) $$k_n = 1 + s_{n,0} + s_{n,1} + \ldots + s_{n,n}$$

$$P_k(z) = \left(\frac{z}{2a}\right)^k \text{ for every } k \neq k_n, \quad k, n = 1, 2, \ldots$$

(16) $$P_{k_n}(z) = Q(n, l_1, l_2, \ldots, l_n, z), \quad n = 1, 2, \ldots$$

and, according to (7), $P_{k_n}(z)$ is of degree k_n.

We shall prove, that the sequence of polynomials $\{P_{k_n}(z)\}$ *fulfills the conditions of the problem*, namely

(17) $$|P_{k_n}(z)| \leqslant 1 \text{ for every } z \in C \text{ and every } n.$$

It follows from (16), (7) that

(18) $$P_{k_n}(0)=0 \quad \text{for every } n,$$

and from (13), (6) we obtain for every $z \in K_k$

(19) $$|z| \leqslant 4l_k + r_k \leqslant 5l_k,\ |z| \leqslant 5R_n \text{ when } k > n$$

according to (11), and hence, according to (9), (16):

(20) $$|P_{k_n}(z)| \leqslant 1 \quad \text{for every } z \in \sum_{k=n+1}^{\infty} K_k.$$

From (19), (11), (10), (14) it follows

(21) $$|z| \leqslant \tfrac{5}{8} < 1 \quad \text{for every } z \in C.$$

(22) $$\begin{aligned} |z-4l_i| &\leqslant |z-4l_k| + |4l_k - 4l_i| < r_k + \max(4l_k, 4l_i) \leqslant \\ &\leqslant l_k + 4l_1 \leqslant 5l_1 = \tfrac{5}{8} < 1 \quad \text{for every } z \in K_k. \end{aligned}$$

After (6), (13) for every $z \in K_k$,

(23) $$|z-a| \leqslant |z-4l_k| + |4l_k - a| \leqslant r_k + a - 4l_k \leqslant l_k + a - 4l_k < a.$$

From (23), (22), (21), (13), (16), (7), (8), (6) it follows

(24) $$|P_{k_n}(z)| < a^{s_{n,0}} r_k^{s_{n,k}} = (a r_k^{\alpha_k})^{s_{n,0}} \leqslant (a \cdot a^{-\alpha_k^{-1} \cdot \alpha_k})^{s_{n,0}} = 1$$

for every $z \in K_k$, $k \leqslant n$, and from (24), (20), (18), (14) follows (17), q. e. d.

We shall evaluate the number

$$\beta_p = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{|P_{k_n}(3l_p)|}\,.$$

After (11)

$$4l_i - 3l_p \geqslant l_i \quad \text{for } i \leqslant p,$$

$$3l_p - 4l_i \geqslant 3l_p - 2l_{i-1} \geqslant l_p \quad \text{for } i > p,$$

$$a - 3l_p \geqslant a - \tfrac{3}{8},$$

and hence, according to (16), (7), for $n \geqslant p$

(25) $$|P_{k_n}(3l_p)| =$$

$$= 3l_p \cdot (a-3l_p)^{s_{n,0}} \cdot |3l_p - 4l_1|^{s_{n,1}} \dots |3l_p - 4l_p|^{s_{n,p}} \dots |3l_p - 4l_n|^{s_{n,n}} \geqslant$$

$$\geqslant 3l_p \left(a - \frac{3}{8}\right)^{s_{n,0}} \cdot l_1^{s_{n,1}} \cdot l_2^{s_{n,2}} \dots l_{p-1}^{s_{n,p-1}} \cdot l_p^{s_{n,p}+s_{n,p+1}+\dots+s_{n,n}}.$$

From (8) we follow

$$\sqrt[s_{n,0}]{l_1^{s_{n,1}} l_2^{s_{n,2}} \dots l_{p-1}^{s_{n,p-1}} l_p^{s_{n,p}+\dots+s_{n,n}}} = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \dots l_{p-1}^{\alpha_{p-1}} l_p^{\alpha_p+\alpha_{p+1}+\dots+\alpha_n} >$$

$$> l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \dots l_{p-1}^{\alpha_{p-1}} l_p^{\alpha_p+\alpha_{p+1}+\dots} > \frac{1}{2}$$

according to the lemma, (*) and since $l_n < 1$, the more after (15), (8):

(26) $$\sqrt[k_n]{l_1^{s_{n,1}} l_2^{s_{n,2}} \dots l_{p-1}^{s_{n,p-1}} l_p^{s_{n,p}+\dots+s_{n,n}}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{s_{n,0}}{k_n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1+\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_n+\frac{1}{s_{n,0}}}}.$$

From (25), (26) it follows

$$\sqrt[k_n]{|P_{k_n}(3l_p)|} \geqslant \sqrt[k_n]{3l_p} \cdot \left(a - \frac{3}{8}\right)^{\frac{s_{n,0}}{k_n}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{s_{n,0}}{k_n}} =$$

(27) $$= \sqrt[k_n]{3l_p} \left(\frac{a - \frac{3}{8}}{2}\right)^{\frac{1}{1+\alpha_1+\dots+\alpha_n+\frac{1}{s_{n,0}}}}.$$

Since $s_{n,0} = 2^{m_n}$, then after (3), $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n,0} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$, $(k_n > s_{n,0})$

(28) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\alpha_1+\dots+\alpha_n+\frac{1}{s_{n,0}}} = \frac{1}{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n} \geqslant \frac{1}{2},$$

for, after the lemma $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n \leqslant 1$; because $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k_n]{3l_p} = 1$, from (27),

(28) follows

$$\beta_p = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[k_n]{|P_{k_n}(3l_p)|} \geqslant \left(\frac{a-\frac{3}{8}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > 1.$$

In particular, for $a=2{,}795$ is $a-\frac{3}{8}=2{,}42$ so $\beta_p \geqslant 1{,}1$ and, for $a=2A^2+\frac{3}{8}$, $\beta_p \geqslant A$. [It is known from the work of M. Leja (Ann. Soc. Pol. t. XII, p. 57—71), that for every z a finite number $B(z)$ exists, such that $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[k_n]{|P_{k_n}(z)|} \leqslant B(z)$].

We put $\varepsilon=\frac{1}{20}$ and obtain for $A=1{,}1$:

$$\beta_p(1-\varepsilon) \geqslant 0{,}95\cdot 1{,}1 = 1{,}045,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[k_n]{|P_{k_n}(3l_p)|}\,(1-\varepsilon) \geqslant 1{,}045,$$

$$\sqrt[k_n]{|P_{k_n}(3l_p)|}\,(1-\varepsilon) \geqslant 1{,}04 \text{ for every } n \geqslant n_0,$$

$$|P_{k_n}(3l_p)\,(1-\varepsilon)^{k_n}| \geqslant 1{,}04^{k_n} \text{ for every } n \geqslant n_0,$$

and so the sequence $P_{k_n}(z)\,(1-\varepsilon)^{k_n}$ is not bounded in any $|z|<\delta$, for, according to (12), $\lim_{p\to\infty} 3l_p = 0$; and so $\delta(\frac{1}{20})$ *does not exist*, q. e. d.

Remark. It is easy to verify, that the polynomials $P_{k_n}(z)$ are commonly bounded in the circle $|z-a| \leqslant \dfrac{1}{2a}$. This circle can, therefore, be added to the set C, and taking the polynomials $P_{k_n}(2az)$ and the set $C^* = \dfrac{C}{2a}$ $\left(\text{the image of } C \text{ by the transformation } z^* = \dfrac{z}{2a}\right)$ we obtain a result analogous, and $C^* \subset \{|z|<1\}$, all roots of $P_{k_n}(2az)$ involved in C^*. We observe, that the existence of multiple roots of $P_{k_n}(z)$ (and $P_{k_n}(0)=0$) is not essential, for every one of them can be replaced with simple roots, lying in the very circle K_n, their dislocation being indifferent.

Denoting with $\tau(\delta)$ the transfinite diameter of the set $C\{|z-z_0| \leqslant \delta\}$, I put the question, whether the problem of

M. LEJA possesses a solution affirmative with the hypothesis

$$\overline{\alpha}(z_0) = \overline{\alpha} = \overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\tau(\delta)}{\delta} > 0,$$

ev. $\overline{\alpha} = 1$, or $\underline{\alpha} = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\tau(\delta)}{\delta} > 0$, ev. $\alpha = \overline{\alpha} = \underline{\alpha} = 1$. (The inequality is fulfilled $0 \leqslant \underline{\alpha} \leqslant \overline{\alpha} \leqslant 1$).

M. LEJA has put, besides, the folloving problem: given a closed bounded set C of transfinite diameter > 0, does always a point $z_0 \epsilon C$ exist so, that for z_0 the problem defined on the beginning, admits of a positive solution. In connection with this we can put forward the question, whether the following generalization of LEBESGUE's theorem about the points of density is valid: for every closed and bounded set C of transfinite diameter > 0 a sub-set C_1 exists so, that every $\overline{C}_2 \subset C_1$ has a transfinite diameter 0 and for every $z_0 \epsilon C - C_1$ the problem admits of a positive solution.

Jelenia Góra, 1. I. 1947.

UNE CONDITION DE RÉGULARITÉ ET D'IRRÉGULARITÉ DES POINTS FRONTIÈRES DANS LE PROBLÈME DE DIRICHLET

Par F. Leja (Kraków)

1. Soit F un ensemble fermé et borné des points du plan et z_0 un point de F. Je dirai que *l'ensemble F possède au point z_0 la propriété V* si à chaque suite de polynomes

$$P_n(z) = a_{0n} z^n + a_{1n} z^{n-1} + \ldots + a_{nn}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

uniformément bornée dans F et à chaque $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un voisinage V du point z_0 tel que la suite

$$\frac{P_n(z)}{(1+\varepsilon)^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

soit uniformément bornée dans V.

On peut prouver que l'ensemble F possède la propriété V en chaque point d'un continu quelconque appartenant à F[1]) et qu'il peut ne pas posseder la propriété V en un point isolé de F et, plus généralement, en un point qui n'est pas un point de condensation de F. M. Z. Zahorski a donné recemment un exemple d'un ensemble F ne possedant pas la propriété V en un point limite d'une suite des cercles appartenant à F[2]).

2. Soit D un domaine plan quelconque contenant le point ∞ dans son intérieur. Désignons par F la frontière de D et par

$$G(z)$$

la *fonction de Green classique* de D avec le pôle à l'infini, c'est-à-dire la fonction réelle, positive et harmonique dans D

[1]) La démonstration dans mon travail inséré dans les Math. Annalen t. 108 (1933), p. 517—524.

[2]) Ce journal, t. 20, p. 215.

possedant les deux propriétés suivantes: 1⁰ La différence $G(z) - \log|z|$ tend vers une limite finie lorsque $z \to \infty$, 2⁰ $G(z)$ tend vers zéro lorsque z tend vers un point quelconque de F.

On sait que si la fonction $G(z)$ existe elle est unique. La différence $G(z) - \log z$ constitue la solution du problème de Dirichlet pour le domaine D et les données frontières: $-\log z$. Si cette solution existe quelles que soient les données frontières continues sur F, le domaine est dit *régulier*. S. ZAREMBA en 1908[3]) et puis H. LEBESGUE en 1913[4]) ont donné des exemples des domaines *irréguliers*.

Dans un domaine irrégulier la solution du problème de Dirichlet n'existe pas toujours (c'est-à-dire pour toutes les données frontières continues). La fonction de Green classique n'existe jamais. Néanmoins, à chaque domaine D, régulier où non. dont la frontière F est de diamètre transfini positif, on peut faire correspondre, en suivant une méthode créée en 1909 par S. ZAREMBA[5]) ou une autre créée en 1924 par N. WIENER[6]), une solution unique du problème de Dirichlet généralisé et, par suite, aussi une *fonction de Green généralisée*[7]), que je désignerai comme plus haut par $G(z)$. Un point z_0 de la frontière F est dit, d'après LEBESGUE, *régulier* si chaque solution du problème de Dirichlet généralisée tend vers la valeur donnée en z_0 lorsque $z \to z_0$. Dans le cas contraire il est dit *irrégulier*.

M. G. BOULIGAND a démontré[8]) que: Pour qu'un point z_0 de F soit régulier il faut et il suffit que la fonction de Green généralisée $G(z)$ tende vers zéro lorsque $z \to z_0$.

---

[3]) Atti del 4. Congresso Intern., Roma 1908, t. II, p. 194.

[4]) C. R. de la Soc. Math. de France 1913, p. 17.

[5]) Sur le principe de minimum. Bull. de l'Acad. des Sc., Cracovie 1909, p. 197—264.

[6]) Journ. of Math. and Physic, Mass. Inst. of Technol. 1924, p. 24.

[7]) Voici sa définition par la méthode de Wiener: On construit une suite croissante des domaines réguliers $\{D_n\}$ contenant le point ∞, contenus dans D et tels que $D_n \to D$; on forme la fonction de Green classique $G_n(z)$ du domaine D_n et on démontre que la suite $\{G_n(z)\}$ tend dans le domaine D vers une limite $G(z)$ indépendante de la suite $\{D_n\}$. Cette limite est, par définition, la fonction de Green généralisée du domaine D.

[8]) Annales de la Soc. Polon. de Math. t. 4 (1926), p. 59—112.

Il est clair que tous les points frontières d'un domaine régulier sont réguliers. Un domaine irrégulier dont la frontière est de diamètre transfini positif possède au moins un point irrégulier. Si ce diamètre s'annule, tous les points de F sont irréguliers, par définition.

3. On doit à H. Lebesgue et à N. Wiener certains critères de régularité des points frontières. Le but de cette note est de démontrer le critère suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point z_0 de la frontière F d'un domaine plan D (contenant le point ∞) soit régulier est que F possède en ce point la propriété V.

Démonstration. Soit $\{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ un système de $n+1$ points de F. Désignons par $V(\zeta_0, \dots, \zeta_n)$ le produit de toutes les distances mutuelles de ces points

$$V(\zeta_0, \dots, \zeta_n) = \prod_{0 \leqslant i < k \leqslant n} |\zeta_i - \zeta_k|$$

et par $\{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n\}$ un système de $n+1$ points de F tels que le produit $V(\eta_0, \dots, \eta_n)$ soit le plus grand. Supposons que les indices des points $\eta_0, \dots, \eta_n$ soient choisis de manière que parmi les produits

$$\Delta_i = |(\eta_i - \eta_0) \dots (\eta_i - \eta_{i-1})(\eta_i - \eta_{i+1}) \dots (\eta_i - \eta_n)|, \qquad i = 0, \dots, n,$$

Δ_0 soit le plus petit et formons les $n+1$ polynomes

$$(1) \qquad L_p^{(i)}(z) = \frac{z - \eta_0}{\eta_i - \eta_0} \dots \frac{z - \eta_{i-1}}{\eta_i - \eta_{i-1}} \cdot \frac{z - \eta_{i+1}}{\eta_i - \eta_{i+1}} \dots \frac{z - \eta_n}{\eta_i - \eta_n}$$
$$(i = 0, 1, \dots, n)$$

que j'appelerai polynomes extremaux de Lagrange appartenant à l'ensemble F. On démontre que, en chaque point de F, on a

$$(2) \qquad |L_n^{(i)}(z)| \leqslant 1, \qquad i = 0, 1, \dots, n, \ n = 1, 2, \dots$$

et que, si le diamètre transfini de F est positif, la suite $\{\log \sqrt[n]{|L_n^{(0)}(z)|}\}$ tend dans le domaine D vers la fonction

de Green généralisée de ce domaine[9])

$$\lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{|L_n^{(0)}(z)|} = G(z). \tag{3}$$

1⁰ Supposons que F possède la propriété V en un point z_0 de F. Alors il suit de (2) que la suite $\{L_n^{(0)}(z):(1+\varepsilon)^n\}$ est uniformément bornée dans un voisinage V de z_0 donc dans ce voisinage on a

$$|L_n^{(0)}(z)| \leqslant M(1+\varepsilon)^n, \qquad \text{pour } n=1,2,\ldots \tag{4}$$

et d'après (3) $G(z) \leqslant \log(1+\varepsilon)$. Puisque $G(z) > 0$ dans D donc $\lim\limits_{z\to z_0} G(z) = 0$ et par suite le point z_0 est régulier.

2⁰ Supposons maintenant que z_0 soit un point régulier de F. Donc à chaque $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un cercle K_ε de centre z_0 tel qu'on ait

$$G(z) < \log\left(1+\frac{\varepsilon}{8}\right) \qquad \text{dans } D\cdot K_\varepsilon. \tag{5}$$

D'après la travail cité les polynomes extremaux (1) possèdent la propriété suivante:

La limite

$$\limsup_{n\to\infty} \{\max_i \sqrt[n]{|L_n^{(i)}(z)|}\}$$

est égale à 1 dans l'ensemble CD, complémentaire à D, et à $e^{G(z)}$ dans le domaine D, donc elle est comprise d'après (5) entre 1 et $1+\frac{\varepsilon}{8}$ dans le cercle K_ε. Par conséquent la limite supérieure de la suite

$$\sqrt[n]{|L_n^{(i)}(z)|} : \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right), \qquad \text{où } i \text{ peut dépendre de } n,$$

est dans le cercle K_ε plus petite que 1, donc la suite

$$L_n^{(i)}(z) : \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)^n, \qquad n=1,2,\ldots, \tag{6}$$

est bornée en chaque point de K_ε.

---

[9]) Annales de la Soc. Polon. de Mathém. t. 12 (1934), p. 57—71, et t. 18 (1945), p. 1—11.

J'ai démontré ailleurs[10]) que si une suite des polynomes $\{P_n(z)\}$ est bornée en chaque point d'un continu issu d'un point z_0, alors, quel petit que soit $\varepsilon > 0$, la suite $\{P_n(z):(1+\varepsilon)^n\}$ est uniformément bornée dans un voisinage de z_0. Il résulte de ce théorème appliqué à la suite (6) que la suite

$$\left\{L_n^{(i)}(z):\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n\right\}$$

est uniformément bornée dans un cercle K de centre z_0, donc il existe un nombre M tel que dans le cercle K

$$|L_n^{(i)}(z)| \leqslant M\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n, \qquad \text{pour } n=1,2,\ldots,\ 0\leqslant i\leqslant n. \tag{7}$$

Soit $\{P_n(z)\}$ une suite des polynomes uniformément bornée sur F. D'après la formule d'interpolation de Lagrange on a identiquement

$$P_n(z)=\sum_{i=0}^{n} P_n(\eta_i)\, L_n^{(i)}(z)$$

donc, si $|P_n(z)|\leqslant N$ sur F, on a d'après (7)

$$|P_n(z)|\leqslant (n+1)\, MN\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \qquad \text{dans } K$$

et par suite

$$\frac{P_n(z)}{(1+\varepsilon)^n}\leqslant\frac{(n+1)\,MN(1+\varepsilon/2)^n}{(1+\varepsilon)^n} \qquad \text{dans } K.$$

Le dernier membre de cette inégalité est borné donc l'ensemble F possède au point z_0 la propriété V.

Il reste à examiner le cas où le diamètre transfini de F est égale à zéro. Dans ce cas on a

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|L_n^{(0)}(z)|}=\infty \tag{8}$$

en chaque point du domaine D[11]). Je dis que dans ce cas l'ensemble F ne possède la propriété V en aucun de ses points.

---

[10]) Math. Annalen, t. 108 (1933), p. 517—524.

[11]) Annales de la Soc. Polon. de Mathém. t. 12 (1934), p. 65.

En effet, d'après (2) la suite $\{L_n^{(0)}(z)\}$ est bornée sur F. Si F possedait la propriété V en un point z_0 de F, l'inégalité (4) serait satisfaite dans un voisinage de z_0 ce qui reste en contradiction avec la formule (8). Le théorème est donc démontré.

4. Le critère précédent concèrne le problème de Dirichlet dans le plan. Soit maintenant F un ensemble des points dans l'espace à 3 dimensions. Désignons par $|PP_k^{(n)}|$ la distance du point variable P au point fixe $P_k^{(n)}$.

Je dirai que F possède en un point P_0 de F la propriété V si à chaque suite des fonctions harmoniques de la forme

$$\Phi_n(P) = C_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|PP_k^{(n)}|}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

où C_n désigne une constante, uniformément bornée supérieurement dans l'ensemble F et à chaque $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un voisinage V du point P_0 tel que la suite

$$\Phi_n(z) - n\varepsilon \qquad n = 1, 2, \ldots$$

soit uniformément bornée supérieurement dans V.

Il est probable que le critère précédent reste vraie dans l'espace lorsque la propriété V y est entendue au sens dernier.

SUR LES PRINCIPES GÉOMÉTRIQUES DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Par Georges Bouligand (Paris)

1. Retenu à Paris les derniers jours de mai 1947 par mes cours, alors inachevés, je viens saluer la mémoire du Maître dont l'oeuvre a été décisive en plusieurs domaines, notamment en théorie du potentiel et dont l'esprit rigoureux n'était qu'une des marques de son haut idéal. Fort modeste, mon apport dira d'autant mieux mon désir d'être de ceux qui témoignent ici à Stanislas Zaremba leur admiration, leur gralitude, leur affection.

À la fin de 1923, comme je tentais d'étendre le principe de Dirichlet, par exemple au cas où la frontière offrirait un point irrégulier unique, Henri Lebesgue me donna une idée du chemin déjà parcouru dans ce sens, et par Henri Poincaré dans son mémoire sur le balayage, et aussi par Zaremba, grâce à un théorème dont l'énoncé me sembla des plus curieux: il évitait de mettre explicitement en cause les conditions à la frontière pour n'introduire, avec des intégrales triples étendues au domaine D lui-même, qu'une identité valable dans le champ des fonctions ayant leur gradient de carré sommable dans D et détenant l'harmonicité dans D. Ce théorème qui datait de 1909 (Sur le principe du minimum, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie), prit sa plénitude dans le mémoire fondamental publié par Zaremba en 1927 (Journ. de Math. p. et appl., 9-e série, t. VI, p. 127—163), car l'idée qui l'inspirait conduisait, de la manière la plus naturelle, à une forme d'énoncé englobant les principes de Dirichlet

et de NEUMANN[1]). Ce mémoire avait été précédé par une communication de son illustre Auteur dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, datée du 10 mai 1926 (t. 182, p. 1129)[2]).

De tels progrès se comptent. Et pourtant, malgré des culminations de ce genre, l'oeuvre de ZAREMBA en impose dans toutes ses parties. Cette constance s'explique en partie par le souci de reprendre toutes les questions à leurs principes. Et par là, ZAREMBA se montre à tous très accessible; très stimulant aussi, car on lit entre ses lignes la possibilité de travailler utilement, en approfondissant tel ou tel secteur bien localisé des théories classiques.

Voila la pensée qui m'a décidé à écrire ce qui suit.

2. De même que ZAREMBA a renouvelé bien des recherches de théorie du potentiel en substituant à la notion classique du laplacien, somme de dérivées secondes, la notion de certains laplaciens généralisés[3]), de même on peut reconsidérer, à partir de ses principes géométriques, la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Dans les exposés traditionnels relatifs à l'équation

$$f(x,y,z,p,q)=0,$$

on associe à chaque point d'une surface intégrale le plan tangent en ce point, de manière à voir en cette surface un lieu d'éléments de contact annulant f. En réalité, pour prévoir l'absence possible de plans tangents en certains points de la surface qui sera dite intégrale, il vaut mieux introduire en chaque point de cette surface son contingent et son paratingent. Supposons d'abord que le cône des éléments de contact attachés à un point donné soit un *cône convexe* Γ.

---

[1]) Voir dans le même recueil un autre important résultat donné, comme conséquence du précédent, par M. Otton Nikodym (t. XII, 1933, p. 95—108).

[2]) Voir aussi la communication qui fait suite à celle de Stanislas Zaremba.

[3]) S. Zaremba. *Contribution à la théorie d'une équation fonctionnelle de la Physique*, Rendiconti di Palermo, t. 19, 1905, p. 140—150.

Une surface S sera dite une *intégrale contingente* de $f=0$, si en chacun de ses points, le contingent de S est formé de rayons non intérieurs à Γ et dont l'un au moins est sur la surface de ce cône. Au sujet de l'intégrale contingente, je rappellerai seulement ces résultats:

1⁰ Considérons un ensemble ponctuel E du plan $x0y$, et mesurant la longueur d'un arc dans ce plan par une intégrale de la forme

$$\int \varphi(x,y;dx,dy)$$

où la fonction φ, positive est positivement homogène et du premier degré en dx, dy, telle en outre que le demi-cône

$$\zeta = \varphi(x,y;\xi,\eta)$$

soit convexe et compris entre deux demi-cônes de révolution $\zeta = \varkappa\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, si l'on désigne par $\delta(x,y)$ la plus courte-distance (au sens de la longueur irréversible selon φ) comptée depuis l'ensemble E jusqu'au point (x,y), j'ai montré que la surface $z=\delta(x,y)$ est une intégrale contingente de l'équation de HAMILTON-JACOBI dont le cône élémentaire Γ au point x,y,z est précisément le cône ci-dessus[4]).

2⁰ Dans une étude concernant les courbes dont les demi-tangentes, en un de leurs points sont intérieures (au sens large) à un cône convexe $\Gamma(M)$ préalablement donné en ce point, de manière que les divers $\Gamma(M)$ constituent un champ continu de cône, M. ANDRÉ MARCHAUD a déterminé les frontières des régions offertes à de telles courbes issues d'un ensemble ponctuel donné; il a montré qu'une telle frontière s'offre comme intégrale contingente d'une équation aux dérivées partielles dont le cône élémentaire en tout point M est $\Gamma(M)$ [5]).

La notion de l'intégrale contingente, qui appellerait certains théorèmes de détermination univoque, est un premier exemple

---

[4]) Bouligand G., *Essai sur l'unité des méthodes directes* (Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège 1933, 3ᵉ série, t. XIX. Voir les nos 49 à 51).

[5]) A. Marchaud, *Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales. Compositio mathematica*, vol. 3, 1936, p. 89—127. Voir les nos 27 et ss.

des extensions naturelles de la notion d'intégrale d'une équation aux dérivées partielles [6]), obtenues à partir d'une revision des principes géométriques de la théorie.

3. Mais on peut, s'orientant dans une autre voie, définir des *intégrales paratingentes.* Ce nom sera donné à une surface dont le paratingent en chaque point est réduit à un plan, ce plan devant être tangent au cône élémentaire $\Gamma(M)$ de l'équation $f=0$ considérée. De cette définition, il ressort qu'une intégrale paratingente est un lambeau d'une intégrale au sens de la théorie de CAUCHY: prenons sur une telle surface un point non situé sur une arête de rebroussement, alors l'ensemble des points de cette surface susceptibles d'être joints au précédent, en restant sur la surface, et sans avoir à franchir une des arêtes de rebroussement nous fournit la notion d'une intégrale paratingente.

J'ai eu recours à cette notion pour étudier ce que deviennent les intégrales d'une équation aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre, quand le cône élémentaire, pour une valeur de ce paramètre (nous supposerons de nouveau ce cône convexe) tend en chaque point à venir s'appliquer sur un plan $\Pi(M)$ [7]). Supposons que la répartition de ces plans donne naissance à une équation intégrable aux différentielles totales. J'ai montré qu'alors les intégrales paratingentes sont de largeur infiniment petite. Quant aux intégrales au sens de CAUCHY, j'ai pu prouver qu'elles vont présenter des arêtes de rebroussement de plus en plus nombreuses et se resserrant sur la surface, mais cela, en particularisant le problème. Posons, nous le problème de CAUCHY pour une courbe L tangente en chaque point M au plan $\Pi(M)$ et supposons qu'il y ait un groupe

---

[6]) L'hypothèse de convexité du cône élémentaire joue ici un rôle essentiel.

[7]) G. Bouligand, *Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre infiniment voisines d'une équation non intégrable aux différentielles totales,* Journ. de Math. p. et appl. 9ᵉ série, t. XVI, 1937, p. 251—266 Remarquer à cette occasion que la forme réduite adoptée au nº 3 de ce travail et qui joue un rôle privilégié dans toute la suite ne représente qu'un cas particulier. Cela, au même titre que les équations différentielles $dy - f(x,y)\,dx = 0$ où f vérifie une condition de Lipschitz par rapport au cas où f est, sans plus, en dépendance continue du point (x,y).

continu à un paramètre conservant à la fois la courbe L et la famille de nos équations aux dérivées partielles. On se ramène alors immédiatement au problème de CAUCHY pour une équation différentielle ordinaire ce qui rend la démonstration très immédiate.

4. Le problème limite qui précède vient de montrer l'intérêt que présente la notion d'intégrale paratingente. En étudiant des exemples tels que

$$p = \psi(y), \qquad p = z\psi(y),$$

où ψ est une fonction continue sans dérivée, on comprend que l'absence de certaines dérivées partielles pour la fonction f au premier membre de $f(x,y,z,p,q)=0$ doit conduire, si non à la disparition, du moins à la raréfaction des intégrales paratingentes [8]).

Mais à côté de ces divers résultats, antérieurement publiés, il y a lieu d'insister sur un point essentiel: il consiste en une relation qu'on peut établir entre les intégrales au sens de CAUCHY de $f=0$ et les intégrales paratingentes d'une autre équation, dans l'espace à quatre dimensions. Cette relation s'établit par voie de projection sur la variété $u=0$, c'est-à-dire sur l'espace $0xyz$, parallèlement à l'axe $0u$, dans l'hyperespace $0xyzu$; cela dans des conditions que nous allons maintenant préciser.

5. Il est naturel de confronter l'équation $f=0$ avec un système

$$\text{(S)} \qquad p = A(x,y,z,u) \qquad q = B(x,y,z,u)$$

qui s'en déduit en passant de la courbe C_{xyz} définie dans le plan p, q par

$$f(x,y,z,p,q)=0$$

et dépendant des trois paramètres x,y,z à sa représentation paramétrique ci-dessus. Or l'intégration du système (S) équi-

---

8) G. Bouligand, Note XII du Précis d'Analyse de Lainé, tome II 3e et 4e édition.

vaut à la recherche, dans l'hyperespace $0xyzu$, d'une hypersurface

$$(h) \qquad u = u(x, y, z)$$

vérifiant l'équation linéaire

$$(\lambda) \qquad A_u \frac{\partial u}{\partial y} - B_u \frac{\partial u}{\partial x} + (BA_u - AB_u)\frac{\partial u}{\partial z} + \\ + A_y - B_x + A_z B - B_z A = 0$$

où les indices symbolisent des dérivations partielles accomplies sur les fonctions qu'ils accompagnent; puis, cette hypersurface ayant été obtenue à la recherche de surfaces σ situées sur elle, ou encore de surfaces $\overline{\omega}$ qui sont les projections des σ sur $u = 0$ et qui satisfont à l'équation aux différentielles totales (ainsi rendue intégrable):

$$(\delta) \qquad dz = A[x, y, z, u(x, y, z)]\, dx + B[x, y, z, u(x, y, z)]\, dy.$$

En vertu de (λ), on fait ainsi apparaître une famille de surfaces à un paramètre; ce sont des σ particulières dont les projections $\overline{\omega}$ sur $u = 0$ sont des intégrales de $f = 0$.

Comme on le voit, nous n'avons pas recherché ici (ce qui serait malaisé) la généralité maxima. Nous avons admis que A, B ont des dérivées premières continues par rapport aux quatre variables x, y, z, u. Pour bien délimiter les prémisses, convenons que la donnée initiale est celle du système (S) et restreignons-nous à une étude locale autour d'un système de valeurs x_0, y_0, z_0, u_0 pour lequel les dérivées A_u et B_u ne soient pas simultanément nulles. On peut alors passer de (S) à une équation $f = 0$. Soit par exemple $A_u \neq 0$. Alors $f = 0$ s'écrit

$$q = B[x, y, z, \ U(x, y, z, p)]$$

U ayant des dérivées premières par rapport à x, y, z, p, ce qui permet d'envisager le système des caractéristiques de $f = 0$.

6. Mais avant toute considération de ce genre, plusieurs remarques s'imposent. Supposons qu'on parte d'une surface $\overline{\omega}$ qui soit une intégrale quelconque de $f = 0$. Alors, en chaque point de $\overline{\omega}$, les deux équations de (S) ont une solution commune

en u. De $\overline{\omega}$, on déduit donc une surface σ de l'hyperespace $0xyzu$ par laquelle il va passer en général une intégrale bien déterminée de l'équation (λ) du n⁰ 5, par exemple l'hypersurface (h).

Il convient de se représenter que cette hypersurface est engendrée par les courbes intégrales du système différentiel

$$\frac{dx}{B_u}=\frac{dy}{-A_u}=\frac{dz}{AB_u-BA_u}=\frac{du}{A_y-B_x+BA_z-AB_z}$$

et qu'à ce titre, rien ne s'oppose à ce qu'elle ait des hyperplans tangents parallèles à l'axe des u. Le lieu des points de l'hypersurface (h) où se présente cette circonstance est une variété à deux dimensions, soit (w). L'une des surfaces σ qui sillonnent (h) pourra couper (w) suivant une courbe γ: la projection $\overline{\omega}$ de cette σ présentera dès lors en général une arête de rebroussement, qui est elle-même la projection de γ (toujours sur $u=0$).

7. Considérons le problème de CAUCHY relatif à l'équation $f=0$ et à une courbe C et une surface $\overline{\omega}$ apportant une solution de ce problème. Cette surface $\overline{\omega}$ est la projection sur $u=0$ d'une surface σ qui est la solution d'un autre problème de CAUCHY relatif au système (S) et à une courbe Γ projetée sur $u=0$ suivant C et le long de laquelle u se détermine, une fois p, q calculés par le processus classique, en utilisant le système (S). Lorsque l'on a trouvé Γ, on peut à volonté s'en servir pour retrouver la surface $\overline{\omega}$: à cette fin, on passera par l'intermédiaire de l'hypersurface (h) qui est une intégrale de l'équation linéaire (λ) et qui contient Γ; il y a sur cette hypersurface une surface σ qui va contenir aussi Γ et sera projetée suivant $\overline{\omega}$.

Cela fait comprendre le mécanisme des cas d'indétermination. Dans ce qui précède, nous avons en effet exclu implicitement le cas où Γ serait une *courbe caractéristique* de l'équation linéaire (λ). Lorsque cette circonstance se produit, le système (S) fait spontanément correspondre à Γ (le long de laquelle x,y,z,u sont fonctions d'un certain paramètre) une courbe de l'espace x,y,z le long de laquelle, en vertu du système (S), les cinq quantités x,y,z,p,q sont elles-mêmes des fonctions du paramètre précédent. On voit ainsi s'introduire

tout naturellement les *bandes d'éléments de contact*, que la théorie classique fait intervenir indépendamment du système (S) et qu'elle dénomme encore *caractéristiques* pour exprimer qu'elles se prêtent au raccord d'une infinité de surfaces intégrales de $f=0$ [9]).

8. Au point de vue didactique les considérations élémentaires qui précédent forment, grâce à l'adjonction d'une quatrième dimension, une introduction naturelle à l'étude d'une équation du premier ordre $f(x,y,z,p,q)=0$ par les méthodes ordinaires propres à l'espace à trois dimensions et inspirées par l'idée de dualité. D'ailleurs, dans des problèmes classiques comme la recherche d'une surface dont les normales rencontrent une courbe assignée, c'est à un système (S) (et non à une équation du type $f=0$) que l'on se trouve directement conduit.

Au point de vue de la recherche, on aperçoit maintenant des questions intéressantes. Il suffira, dans l'application de la méthode signalée au n° 5, de conditions supplémentaires

---

[9]) On pourrait essayer d'appliquer ce qui précéde à l'étude du comportement des solutions d'un système (S_ε) de la forme suivante

$$p=y+\varepsilon A(x,y,z,u) \qquad q=\varepsilon B(x,y,z,u)$$

en supposant que ε désigne un paramètre susceptible de tendre vers zéro (et aussi, de figurer dans A et B). L'équation (λ) s'écrit alors

$$A_u\frac{\partial u}{\partial y}-B_u\frac{\partial u}{\partial x}+(BA_u-AB_u)\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\varepsilon}+A_y-B_x+A_zB-B_zA=0.$$

Ses caractéristiques sont les courbes intégrales d'un champ vectoriel aux composantes

$$B_u, \quad -A_u, \quad AB_u-BA_u, \quad \frac{1}{\varepsilon}+A_y-B_x+A_zB-B_zA.$$

Le vecteur du champ tend à devenir parallèle à l'axe des u quand ε tend vers zéro et on peut espécer rejoindre dans cette voie les recherches citées au 2ᵉ alinéa du n° 3; cela en particularisant (S_ε) de manière que, pour l'équation $f_\varepsilon=0$ correspondante, le cône enveloppé par les plans des éléments de contact issus d'un même point soit un cône convexe et supposant de plus que la courbe C ait été choisie de manière que la tangente en chacun de se points se trouve à l'extérieur du cône correspondant.

peu restrictives[10]) pour être en mesure d'affirmer que (h) est une intégrale paratingente de (λ) et que les surfaces s déduites de (h) par l'entremise de l'équation (δ) sont des intégrales paratingentes du système (S). La recherche des dites conditions accomplie, on verrait se préciser la relation entre intégrale de CAUCHY et intégrale paratingente, la premiere s'offrant dans l'espace $0xyz$ comme la projection d'une intégrale paratingente de l'hyperespace $0xyzu$.

9. Ce qui précéde suppose que l'on ait étendu la notion d'intégrale paratingente à un système d'équations. Il suffit pour cela de suivre la voie la plus naturelle. Considérons un système de la forme

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$$

conditionnant n fonctions inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de deux variables indépendantes x, y (ou de variables plus nombreuses) ainsi que leurs dérivées premières

$$p_1, p_2, \cdots, p_n$$
$$q_1, q_2, \cdots, q_n.$$

Dans l'espace $(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une intégrale paratingente est une variété

$$z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y), \ldots, \quad z_n = z_n(x, y)$$

dont toute paratingente en chaque point est dans une variété linéaire

---

[10]) La nécessité de telles conditions apparait lorsqu'ayant pris, dans un espace à n dimensions une famille F à $n-1$ paramètres de courbes, douées d'une paratingente unique en chaque point et telles que dans une région R, il passe une et une seule de ces courbes, et pris en outre une autre courbe L à paratingente unique, on se propose d'étudier l'ensemble formé par les courbes de F rencontrant L. Dans le cas $n = 3$, par exemple, on ne peut pas conclure des conditions venant d'être énoncées que cet ensemble soit constitué par une surface douée en chaque point d'un paratingent plan.

$$Z_1 = p_1 X + q_1 Y, \quad Z_2 = p_2 X + q_2 Y, \ldots, \quad Z_n = p_n X + q_n Y$$

astreinte en ce point à la condition, pour les coefficients des X, Y dans les seconds membres, d'annuler $f_1, f_2, \ldots, f_n$ [11]).

10. Cette notion générale s'est montrée féconde en des recherches récentes d'un de mes élèves, M. GEORGES LLENSA, qui a étudié le système classique

$$\text{(S)} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\, v \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, w = \overrightarrow{\text{grad}}\, w \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, u = \overrightarrow{\text{grad}}\, u \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, v = 0$$

de la théorie des systèmes triples orthogonaux, en s'attachant à découvrir des propriétés de dérivabilité des surfaces $u =$ const., $v =$ const., $w =$ const. définies par une de ses solutions (u, v, w). Comme l'élimination de deux des fonctions inconnues présuppose des propriétés de dérivabilité, il était naturel de commencer, à ce point de vue, par l'étude de solutions particulières conduisant à des systèmes triples, ou dans l'une des familles, le passage d'une des surfaces à une surface infiniment voisine peut s'interpréter comme une opération infinitésimale de parallèlisme, mais en supplantant le parallèlisme euclidien par le parallélisme au sens de LOBATCHEFSKY (schéma de POINCARÉ).

Soient alors $O(u)$ et $R(u)$ le centre et le rayon d'une sphère $S(u)$ fonction continue du paramètre u. Soit F_1 la famille des surfaces de niveau d'une intégrale paratingente quelconque de l'équation

$$(\overline{MO} - R^2)\, \overline{\text{grad}}^2\, u = 1$$

et soit F_2 toute famille F_1 déduite de trois fonctions u, v, w (de gradients $\neq 0$) fournissant une intégrale paratingente du système (S). M. GEORGES LLENSA établit les deux théorèmes suivants [12]).

---

[11]) G. Bouligand, *Sur quelques groupements de problèmes*. La Revue Scientifique 82e année 1944, page 10, première colonne.

[12]) G. Llensa, *Sur les propriétés de dérivabilité relatives à certains systèmes triples orthogonaux*, C. R. T. 220, 1945, p. 297. Voir aussi C. R. T. 222, 1946, p. 845.

Théorème I. *Pour qu'une surface $u = u_0$, disjointe de $S(u_0)$, appartienne à une famille F_1 (au sens indiqué ci-dessus), il faut et il suffit qu'elle soit à courbure bornée.*

Théorème II. *Pour qu'une surface $\mu = u_0$, disjointe de $S(u_0)$, appartienne à une famille F_2, il faut et il suffit que sa représentation explicite possède des dérivées secondes continues.*

Et M. Llensa montre encore (voir sa seconde note citée) que le résultat obtenu pour $u = u_0$, lequel se transmet aux surfaces voisines de la même famille, ne doit faire préjuger en rien de ce qui se passe pour les deux autres.

On voit ici se manifester, grâce à la continuité des gradients de u, v, w (réclamée par la propriété spécifique d'intégrale paratingente qui particularise toute famille F_2) des propriétés d'*hyperdérivabilité* du système S (c'est-à-dire impliquant l'existence de dérivées d'un ordre supérieur à celui des dérivées présentes dans S). Dans le théorème I, qui généralise une remarque très immédiate relative à l'équation familière $p^2 + q^2 = 1$[13]), il ne serait pas nécessaire d'introduire une intégrale paratingente, mais seulement une intégrale uniforme. Cette substitution n'est plus possible dans l'énoncé du théorème II, comme l'a signalé M. G. Llensa en soutenant sa Thèse à Paris le 21 juin 1947. Et en effet, il existe des solutions uniformes de (S) qui correspondent par exemple à des surfaces de révolution parallèles entre elles, au sens euclidien, mais qui tout en étant à courbure bornée, n'ont pas partout de courbure principales définies.

11. Je suis au ferme de l'exposé que je me proposais de donner ici, exposé qui vaut surtout par les compléments que d'autres ont su ajouter à mes propres idées. Mais j'ai l'impression que l'esprit animant ses différentes parties se distingue par

---

[13]) G. Bouligand, Bull. Scienc. Math. 2e série, t. 60, 1936, p. 211—213.

une tendance à mettre au premier plan l'*Analyse géométrique*[14]) celle qui dépasse les préoccupations du continu purement numérique, en étudiant de la manière la plus générale possible les limites des suites de figures. Et STANISLAS ZAREMBA est certainement l'un de ceux dont l'oeuvre a canalisé dans cette voie une partie importante de l'activité mathématique.

---

[14]) Ce livre est celui que j'ai choisi pour un nouveau livre destiné à synthétiser trois de mes ouvrages antérieurs: Leçons de Géométrie Vectorielle, Premières notions sur la Théorie générale des groupes, Introduction à la géométrie infinitésimale directe.

REMARQUES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES POSSÉDANT UNE INVOLUTION CYCLIQUE PRIVÉE DE POINTS UNIS

Par Lucien Godeaux (Liège)

A diverses reprises, nous avons étudié les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique[1]). En particulier, nous avons considéré les involutions privées de points unis, ce qui nous a permis de construire une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$ [2]). Dans cette note, nous nous proposons de reprendre l'étude des involutions cycliques d'ordre p, privées de points unis, appartenant à une surface algébrique possédant ∞^1 courbes canoniques effectives au moins et dont les systèmes pluricanoniques ne sont pas composés au moyen d'un faisceau. Nous établissons notamment que le système canonique d'une telle surface contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution, que la surface support de celle-ci soit régulière ou non. Nous complètons en outre, sur divers points, les résultats que nous avons obtenus antérieurement, dans les notes citées.

1. Commençons par rappeler une propriété des courbes algébriques de genre supérieur à l'unité, contenant une involution cyclique d'ordre premier, privée de points unis.

---

[1]) Voir par exemple notre exposé: *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

[2]) *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (Rend. Accad. dei Lincei, 2e sem. 1931); *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro, dont le genre linéaire est égal à deux* (Bull. Acad. de Belgique, 1932); *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique régulière* (Idem., 1932).

Soit C une courbe algébrique de genre $\pi > 1$, contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, privée de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle de C en soi, génératrice de I_p, et par C' une courbe image de cette involution. Si π' est le genre de C', on a, par la formule de ZEUTHEN,

$$p(\pi' - 1) = \pi - 1.$$

La série canonique $|K|$ de C est transformée en elle-même par T et contient un certain nombre ν de séries linéaires partielles appartenant à I_p. Désignons par $|K_1|, |K_2|, \dots, |K_\nu|$ ces séries partielles. L'une d'elles, par exemple la première $|K_1|$, est, d'après l'interprétation géométrique de la formule de ZEUTHEN donnée par M. CASTELNUOVO, la transformée de la série canonique de C', de dimension $\pi' - 1$.

Les séries $|K_2|, |K_3|, \dots, |K_\nu|$ ont pour homologues, sur C', des séries d'ordre $2\pi' - 2$, qui sont nécessairement des séries paracanoniques de C', de dimensions $\pi' - 2$.

La transformation T agit sur les groupes de $|K|$ comme une homographie sur les points d'un espace linéaire à $\pi - 1$ dimensions et par conséquent on a

$$\pi' - 1 + (\nu - 1)(\pi' - 2) + \nu = \pi.$$

En utilisant la formule de ZEUTHEN, on en déduit $\nu = p$.

Donc, *la série canonique $|K|$ de C contient p séries linéaires partielles appartenant à l'involution I_p, l'une de dimension $\pi' - 1$, les $p - 1$ autres de dimension $\pi' - 2$.*

2. Soit F une surface algébrique régulière, de genre arithmétique $p_a > 1$, contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, privée de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution I_p. Nous désignerons par Φ une surface image de l'involution I_p et par p'_a son genre arithmétique.

Nous ferons les hypothèses suivantes:

1) Le genre arithmétique p'_a de Φ est supérieur à zéro;

2) Les systèmes pluricanoniques de F ne sont pas composés au moyen d'un faisceau.

La surface Φ est, comme la surface F, régulière et entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de Φ, on a la relation[3])

$$(1)\qquad p_a + 1 = p(p'_a + 1).$$

Il en résulte que, p étant supérieur à l'unité, on a $p_a > p'_a$.

Le système canonique $|C|$ de F est transformé en lui-même par T. Il ne peut cependant appartenir à l'involution I_p, car alors il lui correspondrait sur Φ le système canonique de cette surface et on aurait $p_a = p'_a$, ce qui est impossible.

Il en résulte que le système $|C|$ contient un certain nombre ν de systèmes linéaires partiels

$$|C_1|, |C_2|, \dots, |C_\nu|,$$

appartenant à l'involution I_p. A ces systèmes correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets

$$|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \dots, |\Gamma_\nu|,$$

dont l'un, par exemple $|\Gamma_1|$, est le système canonique de Φ d'après un théorème classique d'ENRIQUES.

Soient $r_1, r_2, \dots, r_\nu$ les dimensions des systèmes précédents. T opère sur les courbes de $|C|$ comme une homographie sur les points d'un espace linéaire à $p_a - 1$ dimensions, donc on a

$$(2)\qquad r_1 + r_2 + \dots + r_\nu + \nu = p_a.$$

On a d'ailleurs, puisque $|\Gamma_1|$ est le système canonique de Φ, $r_1 = p'_a - 1$.

Désignons par π le genre linéaire de la surface F, par π' celui de la surface Φ. Les courbes C_1 sont donc de genre π et les courbes Γ_1 de genre π'. Entre une courbe Γ_1 et la courbe C_1 homologue, on a une correspondance $(1, p)$ privée de points unis, donc, d'après la formule de ZEUTHEN,

$$(3)\qquad \pi - 1 = p(\pi' - 1).$$

La même formule s'applique également à la correspondance entre une courbe $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots,$ ou Γ_ν et la courbe $C_2, C_3, \dots,$ ou C_ν homologue, par conséquent les courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_\nu$ sont de genre π'.

---

[3]) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* (Bull. Soc. Math. de France, 1919); *Les involutions…* (loc. cit.).

3. L'adjoint $|C'|$ à $|C|$, c'est-à-dire le système bicanonique de F, est transformé en lui-même par T. D'autre part, comme F est régulière, il découpe sur une courbe C la série canonique complète de celle-ci. Si cette courbe est transformée en elle-même par T, c'est-à-dire est une courbe $C_1, C_2, \ldots$ ou C_ν, la série canonique de cette courbe contient p séries linéaires partielles dont les groupes sont transformés en eux-mêmes par T.

Soit G un de ces groupes. La dimension du système $|C'|$ étant égale à $p_a + \pi - 1$, il passe certainement des courbes C' par G et ces courbes sont transformées les unes dans les autres par T. Il en résulte qu'il existe au moins une courbe C', transformée en elle-même par T, passant par le groupe G. Par conséquent, $|C'|$ contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p et découpant, sur chacune des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ les p séries linéaires appartenant à I_p.

A ces p systèmes linéaires correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets parmi lesquels se trouvent les adjoints $|\Gamma_1'|, |\Gamma_2'|, \ldots, |\Gamma_\nu'|$ aux systèmes $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_\nu|$.

Puisque la surface Φ est régulière, l'adjoint $|\Gamma_1'|$ au système $|\Gamma_1|$ découpe, sur une courbe Γ_1, la série canonique complète, de dimension $\pi'-1$. Si r est la dimension de $|\Gamma_1'|$, la dimension du système canonique de Φ est donc $r - \pi' = p_a' - 1$, donc $|\Gamma_1'|$ a la dimension $p_a' + \pi' - 1$.

Sur une courbe Γ_2, le système $|\Gamma_1'|$ découpe une série linéaire d'ordre $2\pi'-2$, paracanonique. Cette série est complète, car autrement, il existerait sur la courbe C_2, homologue, des groupes canoniques appartenant à I_p et non situés sur des courbes C' transformées en elles-mêmes par T. Il en résulte que cette série a la dimension $\pi'-2$ et que le système $|\Gamma_1' - \Gamma_2|$ a la dimension p_a'. Il en est de même des systèmes

$$|\Gamma_1' - \Gamma_3|, |\Gamma_1' - \Gamma_4|, \ldots, |\Gamma_1' - \Gamma_\nu|.$$

Observons maintenant que les systèmes

$$|\Gamma_1' - \Gamma_2|, |\Gamma_1' - \Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_1' - \Gamma_\nu|$$

coincident, dans un certain ordre, avec les systèmes

$$|\Gamma_2|, |\Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_\nu|.$$

On a donc

$$r_1 = p'_a - 1,\ r_2 = r_3 = \dots = r_\nu = p'_a.$$

Les relations (1) et (2) donnent

$$(p'_a + 1) - 1 = p_a = p(p'_a + 1) - 1,$$

d'où $\nu = p$.

On voit donc que:

Si une surface régulière F de genre arithmétique $p_a > 1$ et dont les systèmes pluricanoniques ne sont pas composés au moyen d'un faisceau, contient une involution cyclique d'ordre premier p, privée de points unis et dont l'image est une surface Φ de genre arithmétique $p'_a > 0$, le système canonique $|C|$ de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution; l'un a la dimension $p'_a - 1$ et est le transformé du système canonique de Φ, les autres ont la dimension p'_a.

4. Supposons maintenant que la surface Φ ait le genre arithmétique $p'_a = 0$. On a alors

$$p_a = p - 1.$$

Le raisonnement précédent n'est plus applicable sans modification, le système canonique de Φ n'existant pas et aucun des systèmes $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \dots, |\Gamma_\nu|$ ne coïncidant donc avec le système canonique de Φ.

On prouve encore, comme plus haut, que l'adjoint $|C'|$ à $|C|$ contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution I_p et auxquels correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets parmi lesquels se trouvent les adjoints

$$|\Gamma'_1|, |\Gamma'_2|, \dots, |\Gamma'_\nu| \text{ à } |\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \dots, |\Gamma_\nu|.$$

Le système canonique $|\Gamma'_1 - \Gamma_1|$ n'existant pas, $|\Gamma'_1|$ a la dimension $\pi' - 1$ et il en est de même des systèmes $|\Gamma'_2|, \dots, |\Gamma'_\nu|$.

Le système $|\Gamma'_1|$ découpe, sur une courbe Γ_2, une série paracanonique complète, de dimension $\pi' - 2$ et par conséquent, il existe une courbe $\Gamma'_1 - \Gamma_2$. De même, il existe une courbe $\Gamma'_1 - \Gamma_3, \dots$, une courbe $\Gamma'_1 - \Gamma_\nu$, une courbe $\Gamma'_2 - \Gamma_1$, une courbe $\Gamma'_2 - \Gamma_3, \dots$, une courbe $\Gamma'_\nu - \Gamma_{\nu-1}$. Ces différentes courbes coïnci-

dent nécessairement avec les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$, qui sont isolées (chaque courbe étant obtenue plusieurs fois). On a

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu = 0$$

et la formule (2) donne

$$\nu = p_a = p - 1 .$$

Si une surface algébrique régulière F, de genre arithmétique $p_a > 1$ et dont les systèmes pluricanoniques ne sont pas composés au moyen d'un faisceau, contient une involution cyclique d'ordre premier p, privée de points unis et de genre arithmétique $p'_a = 0$, le système canonique $|C|$ de F contient $p-1$ courbes isolées, appartenant à l'involution. On a $p_a = p - 1$.

5. Nous allons maintenant construire le système bicanonique de Φ.

Le système canonique $|C|$ de F, de dimension

$$p_a - 1 = p - 2 > 0,$$

contient $p-1$ courbes isolées

$$C_1, C_2, \ldots, C_{p-1},$$

transformées en elles-mêmes par T. On peut choisir une racine primitive ε d'ordre p de l'unité, de manière à attacher à ces courbes respectivement les racines

$$\varepsilon^0 = 1, \ \varepsilon, \ \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-2}.$$

Le système bicanonique $|C'| = |2C|$ de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à I_p et qui contiennent respectivement les courbes

$$2C_1, \ C_1 + C_2, \ C_1 + C_3, \ldots, C_1 + C_{p-1}, \ C_2 + C_{p-1},$$

auxquelles sont respectivement attachées les racines

$$\varepsilon^0 = 1, \ \varepsilon, \ \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-2}, \ \varepsilon^{p-1} .$$

A ces systèmes correspondent sur Φ les systèmes

$$|2\Gamma_1|, |\Gamma_1 + \Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_1 + \Gamma_{p-1}|, |\Gamma_2 + \Gamma_{p-1}| . \tag{4}$$

Parmi ces systèmes se trouvent les $p-1$ systèmes

$$|\Gamma'_1|, |\Gamma'_2|, \ldots, |\Gamma'_{p-1}| .$$

Le système $|\Gamma_1'-\Gamma_1|$ n'existant pas, $|\Gamma_1'|$ ne peut coïncider avec un des $p-1$ premiers systèmes (4) et on a

$$|\Gamma_1'| = |\Gamma_2 + \Gamma_{p-1}|.$$

Observons que les systèmes (4) peuvent s'écrire, dans un autre ordre,

$$|\Gamma_1+\Gamma_2|, |2\Gamma_2|, |\Gamma_2+\Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_2+\Gamma_{p-1}|, |\Gamma_3+\Gamma_{p-1}|.$$

On en déduit

$$|\Gamma_2'| = |\Gamma_3 + \Gamma_{p-1}|$$

et par conséquent

$$|\Gamma_1''| = |\Gamma_2' + \Gamma_{p-1}| = |\Gamma_3 + 2\Gamma_{q-1}|.$$

Or, les courbes $2\Gamma_{p-1}$ et $\Gamma_1+\Gamma_{p-3}$ appartiennent au même système linéaire et on a donc

$$|\Gamma_1''| = |\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_{p-3}|.$$

Par conséquent,

$$|\Gamma_1'' - \Gamma_1| = |\Gamma_3 + \Gamma_{p-3}|.$$

Le système bicanonique de Φ correspond donc à la racine ε^{p-2} et par conséquent, si nous posons

$$p = 2\lambda + 1,$$

il comprend les courbes

$$\Gamma_1+\Gamma_{p-1}, \Gamma_2+\Gamma_{p-2}, \Gamma_3+\Gamma_{p-3}, \ldots, \Gamma_\lambda+\Gamma_{\lambda+1}.$$

Le bigenre de Φ est d'ailleurs $P_2' = \pi'$.

Observons que les λ courbes précédentes sont linéairement indépendantes et que par suite on a $\pi' \geqslant \lambda$, c'est-à-dire

$$p \leqslant 2\pi' + 1.$$

6. Supposons maintenant que la surface F ait l'irrégularité

$$q = p_g - p_a > 0$$

et la surface Φ, l'irrégularité

$$q' = p_g' - p_a' \leqslant q.$$

Nous supposerons $p_g > 1$, $p'_g \geqslant p'_a > 0$ et que les systèmês pluricanoniques de F ne sont pas composés au moyen d'un faisceau.

La relation (1) liant les genres arithmétiques de F, Φ est toujours valable et par conséquent on a $p'_a < p_a$, donc $p_g > p'_g$.

Soient encore $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_\nu|$ les systèmes compris dans le système canonique $|C|$ de F, appartenant à l'involution I_p et $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_\nu|$ les systèmes correspondant sur Φ. La relation (2) s'écrit maintenant

(5) $$r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu + \nu = p_g.$$

Le système $|\Gamma_1|$ sera, par hypothèse, le système canonique de Φ, de dimension $p'_g - 1$.

Sur Φ, l'adjoint $|\Gamma'_1|$ à $|\Gamma_1|$ découpe sur une courbe Γ_1, d'après le théorème de Picard, une série de défaut q' appartenant à la série canonique, c'est-à-dire une série de dimension $\pi' - q' - 1$. Il en résulte que $|\Gamma'_1|$ a la dimension

$$p'_g - 1 + \pi' - q' = p'_a + \pi' - 1.$$

Il en est de même, pour la même raison, des systèmes $|\Gamma'_2|, \ldots, |\Gamma'_\nu|$, respectivement adjoints à $|\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_\nu|$.

Sur une courbe Γ_1, les courbes Γ'_2 découpent des groupes de $2\pi' - 2$ points appartenant à une série paracanonique; la dimension de cette série est donc au plus égale à $\pi' - 2$. Nous supposerons qu'elle a la dimension $\pi' - 2 - \delta_2$.

De même, nous désignerons par $\pi' - 2 - \delta_3, \ldots, \pi' - 2 - \delta_\nu$ les dimensions des séries découpées sur une courbe Γ_1 par les courbes $\Gamma'_3, \ldots, \Gamma'_\nu$. Ces séries appartiennent à des séries paracanoniques.

Les courbes $\Gamma'_2 - \Gamma_1$ forment un système linéaire de dimension

$$p'_a + \pi' - 1 - (\pi' - 1 - \delta_2) = p'_a + \delta_2.$$

De même, les systèmes $|\Gamma'_3 - \Gamma_1|, \ldots, |\Gamma'_\nu - \Gamma_1|$ ont les dimensions $p'_a + \delta_3, \ldots, p'_a + \delta_\nu$.

Appliquons la relation (5); on a

$$p'_g - 1 + (\nu - 1) p'_a + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_\nu + \nu = p_g.$$

On en déduit, en utilisant la relation (1),

(6) $$\delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_\nu = q - q' + (p - \nu)(p'_a + 1).$$

7. Aux systèmes $|\Gamma'_1|, |\Gamma'_2|, \ldots, |\Gamma'_\nu|$ correspondent sur F des systèmes linéaires appartenant à l'involution I_p et compris dans le système $|C'|$ adjoint à $|C|$.

Le système $|C'|$ découpe, sur une courbe C, d'après le théorème de PICARD, une série linéaire de dimension $\pi - 1 - q$, appartenant à la série canonique. Les séries découpées sur une courbe C par les transformées des courbes $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_\nu$ appartiennent à une série comprise dans la précédente. Cette série a la dimension

$$\pi' - q' + (\nu - 1)(\pi' - 1) + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_\nu + \nu - 1.$$

On a donc

$$\nu(\pi' - 1) + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_\nu \leqslant \pi - 1 + q - q'.$$

En tenant compte de (3), on en déduit

$$\delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_\nu \leqslant (p - \nu)(\pi' - 1) + q - q'.$$

En rapprochant cette inégalité de la relation (6), on a

$$(p - \nu)(p'_a - \pi' + 2) \leqslant 0.$$

On peut donc affirmer que $\nu = p$ si le genre linéaire π' de Φ est inférieur à $p'_a + 2$.

8. On peut, par une autre voie, montrer que l'on a toujours $\nu = p$.

Dans le système bicanonique $|C'|$ de F, adjoint à $|C|$, de dimension $P_2 - 1 = p_a + \pi - 1$, il existe un certain nombre μ de systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p. Parmi ceux-ci se trouvent les transformés des systèmes $|\Gamma'_1|, |\Gamma'_2|, \ldots, |\Gamma_\nu|$, de dimension $p'_a + \pi' - 1$.

Supposons en premier lieu $\mu = \nu$. En appliquant la théorie des homographies au système $|C'|$, on a

$$\nu(p'_a + \pi' - 1) + \nu = p_a + \pi,$$

d'où

$$\nu(p'_a + \pi') = p(p'_a + \pi')$$

et $\nu = p$.

Supposons maintenant $\mu > \nu$ et soient $|\Gamma'_{\nu+1}|, \ldots, |\Gamma'_\mu|$ les $\mu - \nu$ systèmes de Φ correspondant aux $\mu - \nu$ nouveaux systèmes.

Les systèmes $|\Gamma'_{\nu+1}-\Gamma_1|, |\Gamma'_{\nu+2}-\Gamma_1|, \dots, |\Gamma'_\mu-\Gamma_1|$ ne peuvent exister et ont donc des dimensions $r_{\nu+1}, \dots, r_\mu$ au plus égales à $\pi'-2$. En appliquant la théorie des homographies, on a actuellement

$$\nu(p'_a+\pi')+r_{\nu+1}+\dots+r_\mu+\mu-\nu=p_a+\pi,$$

d'où

$$r_{\nu+1}+\dots+r_\mu=(p-\nu)(p'_a+\pi')-(\mu-\nu).$$

Par conséquent, on a

$$(p-\nu)\,p'_a+(p-\mu)\,\pi'+\mu-\nu\leqslant 0\,.$$

Cette inégalité entraîne l'égalité et on a

$$p=\nu=\mu\,,$$

contrairement à l'hypothèse.

On a donc toujours $\nu=p$ et par conséquent:

Si une surface d'irrégularité q, de genre arithmétique $p_a>1$, dont les systèmes pluricanoniques ne sont pas composés au moyen d'un faisceau, contient une involution cyclique d'ordre premier p, privée de points unis, d'irrégularité q' et de genre arithmétique $p'_a>0$, le système canonique de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, dont l'un est le transformé du système canonique de la surface image de l'involution.

En vertu de (6), on a

$$\delta_2+\delta_3+\dots+\delta_p=q-q',$$

c'est-à-dire que la somme des défauts découpés sur une courbe Γ_1 par les adjoints $|\Gamma'_1|, \dots, |\Gamma'_p|$ aux systèmes $|\Gamma_1|, \dots, |\Gamma_p|$, est égale à l'irrégularité de la surface F.

En particulier, si $q=q'$, on a

$$\delta_2=\delta_3=\dots=\delta_p=0\,.$$

Il est aisé de voir que si $p'_a=0$, on a $\nu=p-1$.

Liége, le 26 août 1947.

SUR LA COURBURE TOTALE DES COURBES FERMÉES

Par Karol Borsuk (Warszawa)

1. Une fonction continue $x(t)$, dont les arguments t sont tous les nombres réels d'un intervalle $a \leqslant t \leqslant b$ et les valeurs

(1) $$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

appartiennent à l'espace cartésien n-dimensionnel C_n[1]), est dite *parcours dans l'espace* C_n. Soit $\bar{x}(\bar{t})$, où $\bar{a} \leqslant \bar{t} \leqslant \bar{b}$, un autre parcours dans C_n. Les parcours $x(t)$ et $\bar{x}(\bar{t})$ sont dits *équivalents*, lorsqu'il existe deux fonctions réelles, continues et non décroissantes $\varphi(\tau)$, $\bar{\varphi}(\tau)$ définies dans l'intervalle $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ et satisfaisant aux conditions:

$$\varphi(0) = a; \quad \varphi(1) = b; \quad \bar{\varphi}(0) = \bar{a}; \quad \bar{\varphi}(1) = \bar{b},$$
$$x[\varphi(\tau)] = \bar{x}[\bar{\varphi}(\tau)] \text{ pour tout } 0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Il est clair que les ensembles des valeurs de deux parcours équivalents coïncident.

Deux parcours (dans C_n) : $X = x(t)$ et $X^* = x^*(t^*)$ sont dits *faiblement équivalents*[2]), lorsqu'il existe une suite finie

---

[1]) Par l'*espace cartésien* n-dimensionnel C_n nous entendons l'espace métrique dont les points sont tous les systèmes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des nombres réels avec la métrique ϱ définie par la formule:

$$\varrho[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)] = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,.$$

[2]) Cette notion est en réalité superflue, car on peut montrer que deux parcours faiblement équivalents sont toujours équivalents et *vice versa*. Nous l'introduisons seulement pour éviter la démonstration, un peu compliquée, de la transitivité de l'équivalence.

$X_1, X_2, \dots, X_m$ de parcours (dans C_n) telle que X_1 coïncide avec X, X_m avec X^* et X_i est équivalent avec X_{i+1} pour $i = 1, 2, \dots, (m-1)$.

L'ensemble des tous les parcours dans C_n se décompose en classes disjointes des parcours faiblement équivalents. Ces classes sont dites *courbes* dans l'espace C_n. Les ensembles des valeurs pour les parcours appartenant à la même courbe L sont évidemment les mêmes. Les valeurs de ces parcours sont dites *points de la courbe L*.

Soit (1) un parcours d'une courbe L de l'espace C_n et σ un système de nombres $t_0, t_1, \dots, t_{k+1}$ tel que

$$(2) \qquad a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b.$$

Il est bien connu, que la borne superieure des sommes

$$\sum_{i=0}^{k} \varrho(x(t_i),\ x(t_{i+1})),$$

pour tous les systèmes σ satisfaisant à la condition (2), ne dépend pas du choix du parcours de la courbe L. Cette borne est dite la *longueur* de L; elle sera désignée par $|L|$.

Dans le cas où il existe un parcours (1) de L pour lequel toutes les fonctions $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ sont presque partout[3]) différentiables dans l'intervalle $a \leqslant t \leqslant b$, la longueur $|L|$ est finie et elle s'exprime par la formule

$$(3) \qquad |L| = \int_a^b \sqrt{x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + \dots + x_n'^2(t)}\, dt\ ^{4)}.$$

La courbe L sera dite *régulière*, lorsqu'il existe un parcours (1) de L tel que toutes les fonctions $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ sont dans l'intervalle $a \leqslant t \leqslant b$ partout différentiables d'une manière continue et le vecteur

$$(4) \qquad \dot{x}(t) = [x_1'(t),\ x_2'(t), \dots, x_n'(t)]\ ^{5)},$$

---

[3]) *presque partout* — c. à d. sauf dans un ensemble de nombres réels de mesure (au sens de H. Lebesgue) nulle.

[4]) Les intégrales sont entendus toujours au sens de H. Lebesgue.

[5]) Un système de n nombres $x_1, x_2, \dots, x_n$ entre parenthèse ( ) désigne le *point* de C_n avec les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$, le même système entre parenthèse [ ] désigne le *vecteur* de l'espace C_n avec les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$.

nommé *vecteur tangent* à la courbe L au point $x(t)$, ne s'annule jamais. Dans ce cas l'intégrale

$$(5)\qquad s(t)=\int_a^t \sqrt{x_1'^2(\tau)+x_2'^2(\tau)+\ldots+x_n'^2(\tau)}\,d\tau$$

est une fonction du paramètre $a \leqslant t \leqslant b$ avec la dérivée partout positive. En désignant par $t(s)$ la fonction inverse à $s(t)$ et en posant

$$\bar{x}(s)=x(t(s)) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant |L|,$$

on obtient un autre parcours de la courbe régulière L. Ce parcours est dit *canonique*. Pour un parcours canonique la longueur du vecteur tangent $\dot{\bar{x}}(s)$ est partout égale à 1.

Une courbe L avec le parcours (1) est dite *fermée*, lorsque $x(a)=x(b)$. Dans le cas où la courbe L est régulière, en satisfaisant aux conditions

$$(6)\qquad x(a)=x(b); \quad \dot{x}(a)=\dot{x}(b),$$

nous disons que L est *régulièrement fermée.*

Soit maintenant une courbe régulièrement fermée L. Admettons que son parcours (2) est canonique, c. à d. $t=s$, $a=0$, $b=|L|$ et qu'il existe presque partout dans l'intervalle $a \leqslant t \leqslant b$ les secondes dérivées $x_i''(s)$, pour $i=1,2,\ldots,n$. La longueur du vecteur

$$(7)\qquad \ddot{x}(s)=[x_1''(s),\ x_2''(s),\ldots,x_n''(s)]$$

s'appelle la *courbure* de la courbe L dans le point $x(s)$. Cette courbure est une fonction presque partout définie du paramètre s; elle sera désignée par $\varkappa(s)$. On a

$$(8)\qquad \varkappa(s)=\sqrt{x_1''^2(s)+x_2''^2(s)+\ldots+x_n''^2(s)}\,.$$

L'intégrale

$$(9)\qquad \varkappa(L)=\int_a^b \varkappa(s)\,ds$$

s'appelle la *courbure totale* de la courbure L. En 1929 M. W. FENCHEL[6]) a démontré, dans le cas $n=3$, le suivant

Théorème. *La courbure totale d'une courbe régulièrement fermée L surpasse 2π, sauf dans le cas où L est une courbe convexe*[7]); *dans ce dernier cas la courbure totale est égale à 2π.*

Le but de ce travail est de montrer, que ce théorème reste valable pour les courbes situées dans l'espace C_n, quel que soit $n=2,3,\dots$

2. ***Lemme 1.*** *Soient $a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}=a_0, a_{k+2}=a_1$ des points de l'espace C_n satisfaisant à la condition $a_i \neq a_{i+1}$ pour $i=0,1,\dots,k$. En désignant par $\mathfrak{a}_i$ le vecteur $\overrightarrow{a_i, a_{i+1}}$ et par α_i l'angle $\sphericalangle(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+1})$ entre les vecteurs $\mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{a}_{i+1}$ (dans le sens de la géométrie élémentaire, donc satisfaisant à l'inégalité $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi$), on a $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \geqslant 2\pi$.*

En se servant de la terminologie de la géométrie élémentaire, on peut nommer les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ les *angles extérieurs* de la ligne brisée, dont les sommets successifs sont $a_0, a_1, \dots, a_k$. Or le lemme 1 se laisse aussi formuler comme il suit:

La somme des angles extérieurs d'une ligne brisée fermée située dans l'espace C_n est toujours $\geqslant 2\pi$.

Démonstration. Dans le cas où $k=1$, on a $\mathfrak{a}_0 = -\mathfrak{a}_1$ et $\alpha_0 = \alpha_1 = \pi$. Il vient $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = \alpha_0 + \alpha_1 = 2\pi$. Dans le cas où $k=2$, les angles $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont extérieurs pour le triangle aux sommets a_0, a_1, a_2 (qui peut être dégénéré) et par conséquent on a $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 2\pi$. Il ne reste donc qu'à prouver le lemme dans le cas ou $k=k_0>2$, en admettant qu'il est vrai pour tout $k<k_0$. Nous distinguons deux cas:

---

[6]) W. Fenchel, *Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven,* Math. Ann. 101 (1929), p. 238—252.

[7]) c. à d. une courbe située sur un plan $P \subset C_n$ et telle que la partie commune de L avec chaque droite $D \subset C_n$ est soit connexe, soit contient deux points seulement.

1° $a_{k-1}=a_{k+1}=a_0$. En posant $\alpha'_{k-2}=\sphericalangle(\mathfrak{a}_{k-2},\mathfrak{a}_0)$, on a:

$$\alpha'_{k-2}\leqslant\pi=\alpha_{k-1} \text{ d'où}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i=\sum_{i=0}^{k-3}\alpha_i+\alpha_{k-2}+\pi+\alpha_k\geqslant\sum_{i=0}^{k-3}\alpha_i+\alpha'_{k-2}.$$

Fig. 1.

Mais la somme $\sum_{i=0}^{k-3}\alpha_i+\alpha_{k-2}$, étant la somme des angles extérieurs de la ligne brisée aux sommets $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}=a_0$ est, conformément à nos hypothèses, $\geqslant 2\pi$. Il en vient $\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\geqslant 2\pi$.

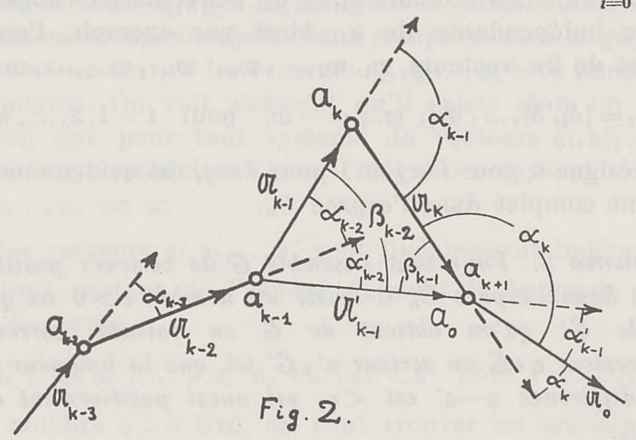


Fig. 2.

2° $a_{k-1}\neq a_{k+1}$. En posant $\mathfrak{a}'_{k-1}=\overrightarrow{a_{k-1}a_0}$; $\alpha'_{k-2}=\sphericalangle(\mathfrak{a}_{k-2},\mathfrak{a}'_{k-1})$, $\alpha'_{k-1}=\sphericalangle(\mathfrak{a}'_{k-1},\mathfrak{a}_0)$; $\beta_{k-2}=\sphericalangle(\mathfrak{a}'_{k-1},\mathfrak{a}_{k-1})$; $\beta_{k-1}=\sphericalangle(\mathfrak{a}'_{k-1},\mathfrak{a}_k)$ on a:

$$\alpha_{k-1}=\beta_{k-2}+\beta_{k-1},$$
$$\alpha_{k-2}+\beta_{k-2}\geqslant\alpha'_{k-2},$$
$$\beta_{k-1}+\alpha_k\geqslant\alpha'_{k-1}.$$

d'où $a_{k-2}+a_{k-1}+a_k \geqslant a'_{k-1}+a'_{k-2}$ et par conséquent:

$$(10) \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i \geqslant \sum_{i=0}^{k-3} a_i + a'_{k-2} + a'_{k-1}.$$

Mais la somme $\sum_{i=0}^{k-3} a_i + a'_{k-2} + a'_{k-1}$ constitue la somme des angles extérieurs de la ligne brisée aux sommets $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a'_k = a_0$ donc, d'après nos hypothèses, elle est $\geqslant 2\pi$. Il en résulte, selon (10), que $\sum_{i=0}^{k} a_i \geqslant 2\pi$, c. q. f. d.

3. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de vecteurs de l'espace C_n. L'ensemble $\mathcal{E}$ est dit *positivement complet dans l'espace* C_n, lorsque tout vecteur $\mathfrak{a}$ de C_n se laisse représenter sous la forme

$$(11) \qquad \mathfrak{a} = \lambda_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathfrak{a}_2 + \dots + \lambda_m \cdot \mathfrak{a}_m,$$

où $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_m \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sont des nombres $\geqslant 0$. Plus généralement, l'ensemble $\mathcal{E}$ est dit *positivement complet dans un hyperplan* [8]) $H \subset C_n$, lorsque tout vecteur de $\mathcal{E}$ est parallel à H et tout vecteur $\mathfrak{a}$ situé dans H se laisse représenter sous la forme (11). Les vecteurs $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_m$ peuvent être choisis d'une manière indépendante de $\mathfrak{a}$. Ainsi par exemple, l'ensemble composé de $2n$ vecteurs $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \dots, \mathfrak{w}_n, \mathfrak{w}_{-1}, \mathfrak{w}_{-2}, \dots, \mathfrak{w}_{-n}$, où

$$(12) \qquad \mathfrak{w}_i = [\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_n^i]; \quad \mathfrak{w}_{-i} = -\mathfrak{w}_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

où δ_j^i désigne 0 pour $i \neq j$ et 1 pour $i = j$, est évidemment positivement complet dans l'espace C_n.

Lemme 2. *Pour tout ensemble $\mathcal{E}$ de vecteurs positivement complet dans l'espace C_n il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que tout ensemble $\mathcal{E}'$ qu'on obtient de $\mathcal{E}$ en faisant correspondre à tout vecteur $\mathfrak{a} \in \mathcal{E}$ un vecteur $\mathfrak{a}' \in \mathcal{E}'$ tel, que la longueur $|\mathfrak{a} - \mathfrak{a}'|$ de la différence $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}'$ est $< \varepsilon$, est aussi positivement complet dans C_n.*

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{E}$ étant positivement complet dans C_n, il existe dans $\mathcal{E}$ un système fini $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_m$ de vecteurs

[8]) Par un *hyperplan m-dimensionnel* de C_n on entend tout sous-ensemble de C_n isométrique à l'espace C_m.

tel que chacun des vecteurs $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_{-1}, \mathfrak{w}_2, \mathfrak{w}_{-2}, \dots, \mathfrak{w}_n, \mathfrak{w}_{-n}$ défini par la formule (12) est de la forme:

$$\mathfrak{w}_i = a_{i,1} \cdot \mathfrak{a}_1 + a_{i,2} \cdot \mathfrak{a}_2 + \dots + a_{i,m} \cdot \mathfrak{a}_m; \tag{13}$$
$$a_{i,j} \geqslant 0 \text{ pour } i = \pm 1, \pm 2, \dots$$

On peut admettre que, quel que soit $j = 1, 2, \dots, m$, il existe un index i (dépendant de j) tel que $a_{i,j}$ est positif, car dans le cas contraire le vecteur $\mathfrak{a}_j$ peut être omis. Or les nombres

$$\beta_{i,j} = a_{i,j} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_{\nu,j} + a_{-\nu,j}) \tag{14}$$

sont positifs pour tout $i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$; $j = 1, 2, \dots, m$.

Soit β le plus petit parmi les nombres $\beta_{i,j}$. En tenant compte des formules (13) et (14) et de la relation $\mathfrak{w}_i + \mathfrak{w}_{-i} = 0$ pour $i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, nous avons

$$\mathfrak{w}_i = \beta_{i,1} \cdot \mathfrak{a}_1 + \beta_{i,2} \cdot \mathfrak{a}_2 + \dots + \beta_{i,m} \cdot \mathfrak{a}_m; \quad \beta_{i,j} \geqslant \beta > 0$$

pour tout $i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$; $j = 1, 2, \dots, m$.

Tout vecteur de l'espace C_n étant de la forme (12), il existe parmi les vecteurs $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_m$ un système composé de n vecteurs linéairement indépendants[9]). Sans compromettre la généralité, on peut admettre que les vecteurs $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$ sont linéairement indépendants. On voit aisément qu'il existe alors un nombre $\eta > 0$ tel, que pour tout système de vecteurs $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \dots, \mathfrak{a}_n'$ de l'espace C_n, satisfaisant aux inégalités $|\mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_i'| < \eta$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, on a:

1⁰ les vecteurs $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \dots, \mathfrak{a}_n'$ sont linéairement indépendants,

2⁰ tout vecteur de l'espace C_n dont la longueur est $< \eta$ est de la forme

$$a_1 \cdot \mathfrak{a}_1' + a_2 \cdot \mathfrak{a}_2' + \dots + a_n \cdot \mathfrak{a}_n \text{ où } |a_\nu| < \beta \quad \text{pour } \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Le nombre $\eta > 0$ fixé, on peut trouver un nombre positif $\varepsilon < \eta$ tel que les inégalités

$$|\mathfrak{a}_j - \mathfrak{a}_j'| < \varepsilon \text{ pour tout } j = 1, 2, \dots, m$$

---

[9]) Les vecteurs $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \dots, \mathfrak{w}_k$ sont appellés *linéairement indépendants*, lorsque la relation $c_1 \mathfrak{w}_1 + c_2 \mathfrak{w}_2 + \dots + c_k \mathfrak{w}_k = 0$, où $c_1, c_2, \dots, c_k$ sont des nombres réels, implique $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

entraînent les inégalités

$$|\mathfrak{w}_i - (\beta_{i,1} \cdot \mathfrak{a}'_1 + \beta_{i,2} \cdot \mathfrak{a}'_2 + \ldots + \beta_{i,m} \cdot \mathfrak{a}'_m)| < \eta$$
$$\text{pour } i = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n.$$

Il résulte de la définition du nombre η que la différence

$$\mathfrak{w}_i - (\beta_{i,1} \cdot \mathfrak{a}'_1 + \beta_{i,2} \cdot \mathfrak{a}'_2 + \ldots + \beta_{i,m} \cdot \mathfrak{a}'_m)$$

se laisse représenter sous la forme

$$\alpha'_{i,1} \cdot \mathfrak{a}'_1 + \alpha'_{i,2} \cdot \mathfrak{a}'_2 + \ldots + \alpha'_{i,n} \cdot \mathfrak{a}'_n, \quad \text{où } |\alpha'_{i,j}| < \beta$$
$$\text{pour } i = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Il en résulte

$$\mathfrak{w}_i = (\alpha'_{i,1} + \beta_{i,1}) \cdot \mathfrak{a}'_1 + (\alpha'_{i,2} + \beta_{i,2})\, \mathfrak{a}'_2 + \ldots + (\alpha'_{i,n} + \beta_{i,n})\, \mathfrak{a}'_n + \\ + \beta_{i,n+1} \cdot \mathfrak{a}'_{n+1} + \ldots + \beta_{i,m} \cdot \mathfrak{a}'_m,$$

où tous les coefficients sont positifs, pour $i = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$.

En tenant compte du fait que l'ensemble contenant $2n$ vecteurs $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \ldots, \mathfrak{w}_n, \mathfrak{w}_{-1}, \mathfrak{w}_{-2}, \ldots, \mathfrak{w}_{-n}$ est positivement complet dans l'espace C_n, on en conclut que l'ensemble $\mathcal{E}'$ contenant les vecteurs $\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \ldots, \mathfrak{a}'_m$ est aussi positivement complet dans C_n, c. q. f. d.

Remarque. Il résulte de la démonstration précédente, que *tout ensemble positivement complet dans C_n contient un sous-ensemble fini positivement complet dans C_n.*

4. ***Lemme 3.*** *Soit $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_{k+1} = \mathfrak{a}_0$ un système de vecteurs tel que $\mathfrak{a}_i \neq 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, k$ et que l'ensemble de ces vecteurs est positivement complet dans un hyperplan $H \subset C_n$. En désignant par α_i l'angle $\measuredangle(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+1})$ entre les vecteurs $\mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{a}_{i+1}$ (dans le sens de la géométrie élémentaire), on a $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \geqslant 2\pi$.*

Démonstration. L'ensemble des vecteurs $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ étant positivement complet dans H, il existe des nombres non négatifs $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que

$$-(\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_k) = \lambda_0 \cdot \mathfrak{a}_0 + \lambda_1 \cdot \mathfrak{a}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \mathfrak{a}_k.$$

En choisissant un point a_0 arbitrairement dans H, on peut trouver successivement les points $a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \in H$ de la manière que

$$\overrightarrow{a_i a_{i+1}} = (1 + \lambda_i) \cdot \mathfrak{a}_i \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, k.$$

Or, on a

$$\overrightarrow{a_0 a_{k+1}} = \sum_{i=0}^{k} \overrightarrow{a_i a_{i+1}} = \sum_{i=0}^{k} (1 + \lambda_i) \cdot \mathfrak{a}_i = 0,$$

donc $a_0 = a_{k+1}$. Or les points $a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$ constituent un système de sommets successifs d'une ligne brisée fermée. Il est clair que $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des angles extérieurs pour cette ligne brisée, donc, selon le lemme 1, on a $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \geqslant 2\pi$, c. q. f. d.

5. Soit $x(s)$ le parcours canonique d'une courbe L régulière. Le point

$$x'(s) = (x_1'(s), x_2'(s), \dots, x_n'(s))$$

parcourt alors, pour $0 \leqslant s \leqslant b = |L|$ une courbe L' située sur la sphère $(n-1)$-dimensionnel S_{n-1} définie dans C_n par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Cette courbe fermée L soit dite *courbe dérivée* de la courbe L. Dans le cas où L est régulièrement fermée, la courbe dérivée L est fermée. En tenant compte des formules (8) et (9), on voit que la courbure totale $\varkappa(L)$ d'une courbe L régulièrement fermée est égale à la longueur de sa dérivée L'.

Les courbes dérivées sont caractérisées par le suivant

Lemme 4. *La condition nécessaire*[10]) *et suffisante pour qu'une courbe fermée $L' \subset S_{n-1}$ soit la courbe dérivée pour une courbe $L \subset C_n$ régulièrement fermée est que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{0p}$, où $p \in L'$, soit positivement complet dans l'hyperplan H_0 déterminé*[11]) *par* 0 *et l'ensemble des points de L'.*

---

[10]) Voir Pólya-Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze* 2, Berlin, Springer 1925, p. 165 et 391, **13**.

[11]) Par l'hyperplan déterminé par un ensemble $A \subset C_n$ on entend l'hyperplan H de la plus petite dimension satisfaisant à l'inclusion $A \subset H \subset C_n$.

Démonstration. Pour prouver que la condition est nécessaire[12]), admettons que L' est donnée par la formule

$$x'(s) = (x'_1(s), x'_2(s), \ldots, x'_n(s)),$$

où $x(s) = (x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s))$ est un parcours canonique d'une courbe L régulièrement fermée. Soit k la dimension de l'hyperplan H_0 déterminé par 0 et L'. Comme on sait, le plus petit ensemble convexe $K \subset C_n$ contenant L' coïncide avec l'ensemble des points de la forme

$$(15) \qquad \alpha_1 \cdot p_1 + \alpha_2 \cdot p_2 + \ldots + \alpha_m \cdot p_m,$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_m \in L'$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont des nombres non négatifs dont la somme est égale à 1. Nous allons prouver que K contient un entourage V du point 0 dans l'hyperplan H_0. L'ensemble K étant convexe, il suffit de démontrer que pour tout hyperplan $(k-1)$-dimensionnel H tel que $0 \in H \subset H_0$ l'ensemble $L' - H$ n'est pas connexe. Un tel hyperplan H coïncide évidemment avec la partie commune de H_0 et d'un hyperplan $(n-1)$-dimensionnel $H' \subset C_n$ passant par 0. Soit $\mathfrak{w}$ le vecteur de longueur 1 perpendiculaire sur H'. La courbe L étant fermée, on a

$$(16) \qquad \int_0^{|L'|} x'(s) \cdot \mathfrak{w}\, ds = 0.$$

Mais L' n'est pas contenu dans H' (car H_0 est l'hyperplan déterminé par 0 et L'), donc $x'(s) \cdot \mathfrak{w}$ n'est pas identiquement égale à 0. Or, on conclut de (16) qu'il existe dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant |L|$ deux nombres s_1 et s_2 tels que $x'(s_1) \cdot \mathfrak{w} > 0$ et $x'(s_2) \cdot \mathfrak{w} < 0$. Or, H' coupe C_n entre $x'(s_1)$ et $x'(s_2)$.

Nous avons ainsi prouvé, que l'ensemble K contient un entourage V de 0 dans H_0. Soit maintenant $\mathfrak{a}$ un vecteur situé dans H_0. Or, pour $\lambda > 0$ suffisamment petit, l'extrémité du vecteur $\lambda \cdot \mathfrak{a}$ (ayant 0 comme point initial) appartient à V, donc elle se laisse représenter sous la forme (15). Or, en posant $\mathfrak{a}_i = \overrightarrow{0p_i}$ on a:

---

[12]) Cette partie de la démonstration ne diffère pas de la démonstration donnée par M. W. Fenchel, l. c. p. 239.

$$\mathfrak{a} = \frac{a_1}{\lambda} \cdot \mathfrak{a}_1 + \frac{a_2}{\lambda} \cdot \mathfrak{a}_2 + \ldots + \frac{a_m}{\lambda} \cdot \mathfrak{a}_m ,$$

où $\frac{a_i}{\lambda} > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$. Or, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{0p}$, où $p \in L'$, est positivement complet dans H_0, c. à d. le nécessité de la condition est prouvée.

Pour démontrer que la condition est suffisante, admettons que l'ensemble $L' \subset S_{n-1}$ des points de la forme

$$x'(s) = (x_1'(s), x_2'(s), \ldots, x_n'(s)),$$

où les fonctions $x_i'(s)$ sont continues dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant b$ et $x_n'(0) = x_n'(b)$, est positivement complet dans l'hyperplan H_0 déterminé par 0 et L'. En posant

$$\bar{x}_i(s) = \int_0^s x_i'(t)\, dt \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n,$$

on trouve que le point

$$\bar{x}(s) = (\bar{x}_1(s), \bar{x}_2(s), \ldots, \bar{x}_n(s))$$

parcourt une courbe régulière $\bar{L} \subset H_0$ pour laquelle L' est la courbe dérivée. Mais, en général, cette courbe $\bar{L}$ n'est pas fermée, parce que la condition $\bar{x}(0) = \bar{x}(b)$ peut faillir, quoique la condition $x'(0) = x'(b)$ est satisfaite. L'ensemble des vecteurs de la forme $\overrightarrow{0p}$, où $p \in L'$, étant positivement complet dans l'hyperplan H_0, il existe des nombres:

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_k < s_{k+1} = b$$

et les nombres positifs $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tels que

$$\text{(17)} \quad \overrightarrow{\bar{x}(b)\, \bar{x}(0)} = a_1 \cdot \overrightarrow{0\, x'(s_1)} + a_2 \cdot \overrightarrow{0\, x'(s_2)} + \ldots + a_{k+1} \cdot \overrightarrow{0\, x'(s_{k+1})}.$$

Posons maintenant, pour $i = 0, 1, \ldots, k$:

$$x^*(s) = \bar{x}(s - \sum_{\nu<i} a_\nu) + \sum_{\nu<i} a_\nu \cdot x'(s_\nu) \quad \text{pour } s_i + \sum_{\nu<i} a_\nu \leqslant s \leqslant s_{i+1} + \sum_{\nu<i} a_\nu,$$

$$x^*(s) = \bar{x}(s_{i+1}) + \sum_{\nu<i} a_\nu \cdot x'(s_\nu) + (s - s_{i+1} - \sum_{\nu<i} a_\nu) \cdot x'(s_{i+1})$$

$$\text{pour } s_{i+1} + \sum_{\nu<i} a_\nu \leqslant s \leqslant s_{i+1} + \sum_{\nu\leqslant i} a_\nu .$$

En tenant compte de la formule (17), on voit que la fonction $x^*(s)$ ainsi définie dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant b^* = b + \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu$, satisfait aux conditions: $x^*(0) = \overline{x}(0)$ et $x^*(b^*) = \overline{x}(b) + \sum_{\nu<k} a_\nu \cdot x'(s_\nu) + a_{k+1} \cdot x'(s_{k+1}) = \overline{x}(b) + (\overline{x}(0) - \overline{x}(b)) = \overline{x}(0) = x^*(0)$.

On a en outre:

$$x^{*\prime}(s) = x'(s - \sum_{\nu<i} a_\nu) \quad \text{pour } s_i + \sum_{\nu<i} a_\nu \leqslant s \leqslant s_{i+1} + \sum_{\nu<i} a_\nu,$$

$$x^{*\prime}(s) = x'(s_{i+1}) \quad \text{pour } s_{i+1} + \sum_{\nu<i} a_\nu \leqslant s \leqslant s_{i+1} + \sum_{\nu\leqslant i} a_\nu.$$

En particulier on a:

$$x^{*\prime}(0) = x'(0) \quad \text{et} \quad x^{*\prime}(b^*) = x'(b) = x'(0).$$

Il en résulte que la courbe L^* avec le parcours (canonique) $x^*(s)$ est régulièrement fermée et L' est sa courbe dérivée. La démonstration du lemme 4 est ainsi terminée.

6. Démonstration de l'inégalité $\varkappa(L) \geqslant 2\pi$. Soit $x(t)$ le parcours canonique d'une courbe L régulièrement fermée. Comme nous avons observé dans le Nr. **5**, l'inégalité en question est équivalente à l'inégalité $|L'| \geqslant 2\pi$, où L' désigne la courbe dérivée de L. Afin de prouver cette dernière inégalité, considerons un système σ de nombres réels $s_0, s_1, \ldots, s_k, s_{k+1}$ tel que

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_k < s_{k+1} = b$$

et que le nombre

$$\delta(\sigma) = \operatorname*{Max}_{0 \leqslant i \leqslant k} (s_{i+1} - s_i)$$

est si petit, que pour tout $i = 0, 1, \ldots, k$ la distance ϱ entre les points $x'(s_i)$ et $x'(s_{i+1})$ satisfait à la condition:

$$\varrho(x'(s_i), x'(s_{i+1})) < 2.$$

Or, il existe exactement un arc géodetique ω_i de la sphère S_{n-1} avec les extrémités $x'(s_i)$ et $x'(s_{i+1})$ et la longueur $< \pi$. La somme $L'(\sigma)$ des arcs ω_i est une „ligne brisée sphérique" inscrite dans la courbe dérivée L'. Il est évident que la longueur $|L'(\sigma)|$ de cette ligne, c. à d. la somme des longueurs $|\omega_i|$ des arcs ω_i ne surpasse pas la longueur $|L'|$ de la courbe dérivée L. Mais l'ensemble des vecteurs de la forme $\overrightarrow{0\,x'(s)}$ est, d'après

le lemme 4, positivement complet dans l'hyperplan H_0 déterminé par 0 et L'. On en conclut, d'après la remarque de la fin du Nr. **3**, qu'on peut choisir le système σ de la manière que les points $x'(0)=x'(s_0), x'(s_1),\dots,x'(s_k), x'(s_{k+1})=x'(0)$ constituent un ensemble positivement complet dans H_0. Il en résulte, d'après le lemme 3, que la somme des angles

$$\sphericalangle(\overrightarrow{0\,x'(s_i)}, \overrightarrow{0\,x'(s_{i+1})}) = |\omega_i|, \quad i=0,1,\dots,k,$$

est $\geqslant 2\pi$. Or $|L'(\sigma)|=\sum_{i=0}^{k}|\omega_i|\geqslant 2\pi$ donc aussi $|L'|\geqslant 2\pi$, c. q. f. d.

7. Démonstration que l'égalité $\int_0^{|L|}\varkappa(s)\,ds=2\pi$ est caractéristique pour les courbes planes convexes. Si L est une courbe convexe régulièrement fermée et située sur un plan H, sa courbe dérivée L est évidemment la grande circonférence de la sphère S_{n-1} le long de laquelle le plan H passant par 0 et parallèle au plan H coupe S_{n-1}, et le point $x(s)$ parcourt cette circonférence une fois dans une direction fixe. Or, dans ce cas la longueur de L', c. à d. l'intégral $\int_0^{|L|}\varkappa(s)\,ds$, est égale à 2π. Reciproquement, il est clair que, lorsque L' est une grande circonférence de S_{n-1} parcourue par le point $x'(s)$ une seule fois dans une fixe direction, la courbe L est située dans un plan parallèle à cette circonférence et qu'elle est convexe.

Admettons maintenant que L n'est pas une courbe plane convexe. Or, la courbe dérivée n'est pas une grande circonférence de S_{n-1} parcourue par $x'(s)$ une seule fois dans une fixe direction. Lorsque L' est une grande circonférence parcourue plusieurs fois dans une fixe direction, la longüeur de L' est $>2\pi$. Dans tout l'autre cas, il existe un nombre $0<s_0<b$ tel que dans tout entourage de s_0 il existe des nombres s_0', s_0'' tels que

$$0<s_0'<s_0<s_0''<b$$

et que l'arc parcouru par $x'(s)$ pour $s_0'\leqslant s\leqslant s_0''$ ne coïncide pas avec un simple parcours de l'arc $\cup(x'(s_0'), x'(s_0''))$, qui constitue la plus courte route joignant sur la sphère S_{n-1} les points $x'(s_0')$ et $x'(s_0'')$.

Il vient

$$(18)\qquad \int_{s_0'}^{s_0''} \sqrt{x_1''^2(s)+x_2''^2(s)+\ldots+x_n''^2(s)}\,ds > |\cup(x'(s_0'), x'(s_0''))|.$$

D'après le lemme 4, l'ensemble des vecteurs de la forme $\overrightarrow{0\,x'(s)}$, $0 \leqslant s \leqslant b$, est positivement complet dans l'hyperplan H_0 déterminé par 0 et les points de la courbe L'. En tenant compte de la remarque de la fin du Nr. **3**, on en conclut, qu'il existe dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant b$ un système fini de nombres $s_1, s_2, \ldots, s_k$ tel que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{0\,x'(s_i)}$, $i=1,2,\ldots,k$ est positivement complet dans H_0. Grâce au lemme 2, on peut admettre, sans compromettre la généralité, que $s_i \neq s_0$ pour $i=1,2,\ldots,k$. On peut admettre de plus, que l'intervalle $s_0' \leqslant s \leqslant s_0''$ ne contient aucun des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_k$, parce qu'on peut choisir les nombres s_0' et s_0'' dans un entourage arbitrairement petit de s_0.

Désignons maintenant, pour tout $s_0' \leqslant s \leqslant s_0''$, par $\varphi(s)$ le point divisant l'arc $\cup(x'(s_0'), x'(s_0''))$ en rapport $(s-s_0'):(s_0''-s)$. En posant

$$\bar{x}(s) = x'(s) \quad \text{pour } 0 \leqslant s \leqslant s_0' \quad \text{et } s_0'' \leqslant s \leqslant |L|,$$
$$\bar{x}(s) = \varphi(s) \quad \text{pour } s_0' \leqslant s \leqslant s_0'',$$

on obtient sur la sphère S_{n-1} une courbe fermée $\bar{L}$ telle que

$$|\bar{L}| = \int_0^{s_0'} \sqrt{x_1''^2(s)+x_2''^2(s)+\ldots+x_n''^2(s)}\,ds + |\cup(x'(s_0'), x'(s_0''))| +$$
$$+\int_{s_0''}^{b} \sqrt{x_1''^2(s)+x_2''^2(s)+\ldots+x_n''^2(s)}\,ds,\ .$$

donc, d'après (18), on a

$$(19)\qquad |\bar{L}| < |L'|.$$

Mais l'ensemble des points de la courbe $\bar{L}$, contenant les points $x'(s_1), x'(s_2), \ldots, x'(s_k)$ est positivement complet dans l'hyperplan H_0. Il en résulte, selon le lemme 2, qu'il existe une courbe régulièrement fermée, pour laquelle $\bar{L}$ est la courbe

dérivée. En tenant compte de la première partie du théorème, démontrée dans le Nr. **6**, on en conclut que .

$$(20) \qquad |\bar{L}| \geqslant 2\pi .$$

Les inégalités (19) et (20) entraînent l'inégalité $|L'| > 2\pi$, c. q. f. d.

Problème. *La courbure totale d'une courbe régulièrement fermée située dans l'espace C_3 et faisant un noeud*[13]) *est-elle toujours* $\geqslant 4\pi$?

---

[13]) Il existe plusieurs définitions d'une courbe fermée faisant un noeud, et la question de leur équivalence reste ouverte. Voici quatre d'entre eux: 1⁰ Une courbe fermée $L \subset C_3$ fait un *noeud,* lorsqu'elle est une image homéomorphe d'une circonférence $S \subset C_3$ tandis que son complémentaire $C_3 - L$ n'est pas une image homéomorphe de l'ensemble $C_3 - S$. 2⁰ Une courbe fermée $L \subset C_3$ fait un *noeud,* lorsqu'elle est une image homéomorphe d'une circonférence S et le groupe fondamental de $C_3 - L$ n'est pas un groupe libre cyclique. 3⁰ Une courbe fermée $L \subset C_3$ fait un *noeud,* lorsqu'elle est une image homéomorphe d'une circonférence $S \subset C_3$, mais il n'existe pas une transformation homéomorphe de l'espace entier C_3 en lui-même transformant L en S. 4⁰ Une courbe fermée $L \subset C_3$ fait un *noeud,* lorsqu'elle est une image homéomorphe d'une circonférence $S \subset C_3$, mais le cercle Q ayant S comme frontière ne se laisse pas transformer par une homéomorphie φ en un sous-ensemble de C_3 de la manière, que $\varphi(S) = L$.

Le problème concernant la courbure totale d'une courbe fermée faisant un noeud, peut être posé pour chaque définition du noeud.

SUR L'ESPACE ANALLAGMATIQUE RÉEL À n DIMENSIONS

Par Elie Cartan (Paris)

La géométrie anallagmatique réelle a fait l'objet de nombreux travaux. Je me propose dans cet article d'attirer l'attention sur deux théorèmes de géométrie analytique anallagmatique relatifs le premier à la représentation d'une transformation analytique par une substitution linéaire déterminée portant sur les coordonnées anallagmatiques, le second relatif à un problème portant sur la recherche d'hypersphères, connaissant les invariants anallagmatiques rationnels de ces hypersphères considérées deux à deux.

I

Généralités sur l'espace anallagmatique

1. *L'espace anallagmatique réel à n dimensions*. Partons d'un espace euclidien réel à n dimensions E rapporté à un système de coordonnées rectangulaires $X_1, X_2, \ldots, X_n$. On peut déduire de E un espace projectif réel à n dimensions par l'addition de *points impropres* en nombre infini. Tout point de cet espace peut être représenté par un système de $n+1$ coordonnées homogènes. L'espace anallagmatique réel à n dimensions, que nous désignons par A, peut également se déduire de l'espace E par l'addition *d'un* point impropre, qu'on appelle le point à l'infini. Pour cela on introduit un système de $n+2$ coordonnées homogènes liées par une certaine relation quadratique. Ces coordonnées dites *anallagmatiques* $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$,

sont reliées aux coordonnées rectangulaires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ par la relation

$$(1) \quad \frac{x_0}{1} = \frac{x_1}{X_1} = \frac{x_2}{X_2} = \ldots = \frac{x_n}{X_n} = \frac{x_{n+1}}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$$

et l'on a

$$(2) \quad F(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_0 x_{n+1} = 0 .$$

Les points à distance finie de l'espace E sont ceux pour lesquels la coordonnée x_0 est différente de zéro. Le point impropre, adjoint à E pour constituer l'espace anallagmatique est celui pour lequel la coordonnée x_0 est nulle. Les équations $x_0 = 0$, $F = 0$ entrainent en effet, dans le domaine réel,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 ,$$

ce qui conduit à un point impropre unique, le *point à l'infini*, dont les coordonnées anallagmatiques sont toutes nulles, à l'exception de x_{n+1}, différente de zéro.

2. *Représentation projective de l'espace anallagmatique.* Nous pouvons regarder, avec Felix Klein les coordonnées homogènes $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ comme les coordonnées homogènes d'un espace projectif à $n+1$ dimensions P; l'equation (2) définit dans cet espace une quadrique réelle Q dont les différents points correspondent aux différents points de l'espace anallagmatique A. Les transformations anallagmatiques de l'espace A seront par définition les transformations projectives de l'espace P qui laissent invariante la quadrique Q. Chacune d'elles peut se traduire analytiquement par une substitution linéaire laissant invariante l'équation quadratique $F(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0$; il faut et il suffit pour cela que si la substitution linéaire change $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ en $x_0', x_1', \ldots, x_n', x_{n+1}'$, on ait

$$F(x_0', x_1', \ldots, x_n', x_{n+1}') = \lambda \cdot F(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}),$$

λ étant un facteur constant arbitraire différent de zéro.

Nous allons montrer qu'on peut toujours supposer $\lambda = 1$. En effet la forme quadratique $F(x)$ se décompose en la somme des carrés de $n+1$ formes linéaires indépendantes dont n sont

précédées du signe + et la dernière du signe —. La forme $F(x')$ se décomposera à son tour en la somme des carrés de $n+1$ formes linéaires indépendantes en $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n+1}$, dont n sont précédées du signe + et la dernière du signe — D'après la loi classique d'inertie, il en résulte que le *facteur* λ *ne peut être que positif*. En divisant les coefficients des $n+2$ formes linéaires $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n+1}$ par $\pm\sqrt{\lambda}$, ce qui ne change pas la transformation projective considérée, on aura le

Théorème 1. *On peut représenter de deux manières différentes toute transformation anallaymatique T par une substitution linéaire laissant invariante la forme quadratique*

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}).$$

3. *Représentation dans l'espace projectif P des hypersphères de l'espace anallagmatique A.* Nous avons dans le numéro précédent porté notre attention sur les points de la quadrique Q qui représentent les points de l'espace anallagmatique. Nous allons montrer que les autres points de P représentent les hypersphères de A.

En effet l'équation d'une hypersphère de l'espace euclidien E est de la forme

$$(3)\qquad a_0(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2) - 2a_1 X_1 - 2a_2 X_2 - \ldots - \\ - 2a_n X_n + a_{n+1} = 0,$$

ou, en utilisant les coordonnées anallagmatiques,

$$(4)\qquad a_0 x_{n+1} - 2a_1 x_1 - 2a_2 x_2 - \ldots - 2a_n x_n + a_{n+1} x_0 = 0.$$

Si a_0 est différent de 0, on a affaire à une hypersphère proprement dite; si $a_0 = 0$ on a affaire à un hyperplan. On voit immédiatement que l'hyperplan considéré comme une hypersphère particulière est caractérisé par la propriété de contenir le point dont toutes les coordonnées anallagmatiques sont nulles sauf x_{n+1}, autrement dit le *point à l'infini*. Les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ seront dites les *coordonnées de l'hypersphère*.

On peut représenter dans l'espace projectif P une hypersphère quelconque par un point n'appartenant pas à la quadrique Q.

Nous allons démontrer le

Théorème 2. *Si on applique aux coordonnées* (a_i) *d'une hypersphère une des deux substitutions, S par exemple (linéaires), qui représentent une transformation anallagmatique donnée T, l'hypersphère dont les coordonnées* a'_i *sont les transformées des* a_i *par la substitution linéaire considérée S est la transformée par T de l'hypersphère donnée.*

En effet soient x_i les coordonnées d'un point de la première hypersphère et x'_i les coordonnées du point transformé des x_i par S; on aura la relation (4) qui peut s'écrire

$$(5) \qquad a_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + a_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial F}{\partial x_n} + a_{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} = 0 .$$

La substitution linéaire S transformant les a_i dans les a'_i et les x_i dans les x'_i, on aura nécessairement

$$(6) \qquad a'_0 \frac{\partial F}{\partial x'_0} + a'_1 \frac{\partial F}{\partial x'_1} + \dots + a'_n \frac{\partial F}{\partial x'_n} + a'_{n+1} \frac{\partial F}{\partial x'_{n+1}} = 0$$ [1]).

En définitive *la substitution linéaire S qui appliquée aux points de la quadrique Q traduit la transformation anallagmatique T appliquée aux points de l'espace anallagmatique A, traduit la même transformation anallagmatique T appliquée aux hypersphères du même espace.*

II

Les hypersphères proprement réelles, les hypersphères improprement réelles et leurs coordonnées semi-normales

4. *Carré scalaire d'une hypersphère.* On appelle carré scalaire de l'hypersphère de coordonnées $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ la valeur de la forme quadratique $F(a_0, a_1, \dots, a_{n+1})$. Si l'hypersphère

---

[1]) En effet la substitution S étant linéaire les quantités $x_i + \varrho a_i$, où ϱ est un paramètre arbitraire, seront transformées en $x'_i + \varrho a'_i$; on aura par suite

$$F(x_i + \varrho a'_i) = F(x_i + \varrho a_i), \quad \text{d'où}$$

$$F(x'_i) + \varrho \Sigma a'_i \frac{\partial F}{\partial x'_i} + \varrho^2 F(a'_i) = F(x_i) + \varrho \Sigma a_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \varrho^2 F(a_i),$$

d'où on déduit immédiatement l'égalité des premiers membres des équations (5) et (6).

est un point, son carré scalaire est nul. Supposons maintenant une hypersphère proprement dite de coordonnée a_0 non nulle. L'équation de cette sphère peut s'écrire

$$\left(X_1 - \frac{a_1}{a_0}\right)^2 + \left(X_2 - \frac{a_2}{a_0}\right)^2 + \dots + \left(X_n - \frac{a_n}{a_0}\right)^2 = \\ = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - a_0\, a_{n+1}}{a_0^2};$$

on en déduit immédiatement

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - a_0\, a_{n+1} = a_0^2 R^2,$$

R désignant le rayon de l'hypersphère, d'où

(7) $$F(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) = a_0^2 R^2.$$

5. *Classification des hypersphères.* Nous avons trois cas à distinguer.

1-er Cas. $F(a_i) < 0$. On a affaire à une hypersphère à centre réel et rayon purement imaginaire, nous dirons que l'hypersphère est *improprement réelle.*

2-ième Cas. $F(a_i) = 0$. On a affaire à une hypersphère de rayon nul, c'est à dire à un *point.*

3-ième Cas. $F(a_i) > 0$. On a affaire à une hypersphère de centre réel et de rayon purement réel, nous dirons qu'elle est *proprement réelle.*

Dans le 3-ième cas nous introduisons la notion *d'hypersphère orientée*; orienter une hypersphère proprement réelle, c'est choisir une des deux régions dans lesquelles l'hypersphère sépare l'espace anallagmatique; la région choisie sera appelée le *domaine* de l'hypersphère orientée. Dans l'espace projectif P, le point représentatif d'une hypersphère est à l'intérieur de la quadrique Q, sur la quadrique Q ou à l'extérieur de la quadrique Q suivant que l'on a affaire à une hypersphère improprement réelle (1-er cas), à un point (2-ème cas) ou à une hypersphère proprement réelle orientée (3-ième cas).

Nous allons montrer que dans chacun de ces cas on peut attribuer à l'hypersphère des coordonnées définies à un facteur

positif près arbitraire, coordonnées que nous appellerons *semi-normales* et nous démontrerons ensuite le

Théorème 3. *Toute transformation anallagmatique T peut être représentée par une substitution linéaire bien déterminée faisant passer d'un système de coordonnées semi-normales d'une hypersphère à un système de coordonnées semi-normales de l'hypersphère transformée.*

6. *Définition des coordonnées semi-normales.* Nous allons passer en revue les trois espèces d'hypersphères.

1-er Cas. Considérons la catégorie des hypersphères improprement réelles pour lesquelles on a

(8) $$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 - a_0 a_{n+1} < 0 .$$

Le produit $a_0 a_{n+1}$ est essentiellement positif. Nous choisirons pour chaque hypersphère improprement réelle la coordonnée a_0 positive, il en sera de même de la coordonnée a_{n+1}. On aura alors par définition pour l'hypersphère des coordonnées semi-normales, *définies à un facteur positif près.*

2-ième Cas. Nous avons cette fois affaire à un point; ici comme les coordonnées x_0, x_{n+1} sont du même signe, nous le prendrons positives; pour l'origine des coordonnées x_{n+1} est nul et nous prendrons x_0 positif; pour le point à l'infini x_0 est nul et nous prendrons x_{n+1} positif. On peut dire qu'on choisira les coordonnées de manière que la somme $x_0 + x_{n+1}$ soit positive, les coordonnées satisfaisant à ces conditions seront, par définition, les coordonnées semi-normales du point.

3-ième Cas. Passons enfin à une hypersphère proprement réelle orientée. Nous choisirons des coordonnées $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ de manière qu'on ait pour tout point intérieur au domaine de l'hypersphère de coordonnées semi-normales $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ l'inégalité:

(9) $$-a_0 x_{n+1} + 2a_1 x_1 + \ldots + 2a_n x_n - a_{n+1} x_0 > 0,$$

ce qu'on peut exprimer en disant que le *produit scalaire*[2]) de l'hypersphère et d'un point du domaine, doué de ces coor-

[2]) Ce produit scalaire n'est autre que la quantité

$$a_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + a_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + a_{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} .$$

données semi-normales, est positif. Les coordonnées $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ de l'hypersphère satisfaisant à cette condition, et qui sont définies à un facteur positif près, seront dites ses coordonnées semi-normales.

On voit que *la coordonnée a_0 sera positive si le domaine de l'hypersphère ne contient pas le point à l'infini, autrement dit si l'hypersphère est orientée intérieurement, elle sera négative si elle est orientée extérieurement.*

Si l'hypersphère est unitaire, on aura, d'après la formule (7), pour la coordonnée semi-normale a_0:

$$a_0 = \frac{1}{|R|}, \quad a_0 = \frac{1}{R}, \quad a_0 = -\frac{1}{R},$$

suivant que l'hypersphère est improprement réelle, proprement réelle orientée intérieurement, ou proprement réelle orientée extérieurement.

7. *Démonstration du théorème* 3. Nous pouvons choisir, d'après le théorème 1 (n° 3) entre deux substitutions linéaires laissant invariante la forme $F(x)$ et susceptibles de représenter une transformation anallagmatique donnée. Nous choisirons celle qui fait passer des coordonnées semi-normales de l'hypersphère improprement réelle Σ_0 d'équation $x_{n+1} + x_0 = 0$, coordonnées qui sont $a_0 = a_{n+1} = 1$, à des coordonnées semi-normales de l'hypersphère transformée par T. Il suffira pour cela que la coordonnée a_0' de cette hypersphère soit positive. Supposons que les équations de la substitution linéaire soient

$$a_i' = a_i^0 a_0 + a_i^1 a_1 + \ldots + a_i^{n+1} a_{n+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n, n+1);$$

et suffira que l'on ait

$$a_i^0 + a_i^{n+1} > 0\,;$$

cette inégalité détermine complètement la substitution à choisir.

La substitution linéaire qui va représenter la transformation anallagmatique T donnée satisfaira aux conditions énoncées dans le théorème 3 en ce qui concerne les hypersphères improprement réelles car si l'on suit par continuité l'hypersphère unitaire Σ_0 jusqu'à une autre hypersphère improprement réelle unitaire Σ, en attribuant à chaque hypersphère de la

suite ses coordonnées semi-normales[3]). La coordonnée a_0' de l'hypersphère transformée par T ne pouvant jamais s'annuler, restera constamment positive, ce qui démontre le théorème 3 pour les hypersphères improprement réelles.

Montrons maintenant que la substitution linéaire choisie satisfait aux conditions du théorème 3 en ce qui concerne les points. En effet on peut passer par continuité d'un point à distance finie à une des hypersphères improprement réelles ayant ce point pour centre; la coordonnée semi-normale x_0 de ce point sera positive; par la substitution linéaire choisie la coordonnée x_0' du point transformé sera également positive, c'est à dire semi-normale[4]).

Passons enfin à une hypersphère réelle orientée de coordonnées semi-normales a_i et soient x_i les coordonnées semi-normales d'un point de son domaine; on aura entre les coordonnées a_i et x_i l'inégalité (9) du n⁰ 6. La substitution linéaire choisie pour représenter la transformation T fera passer des coordonnées semi-normales x_i à des coordonnées x_i' également semi-normales; d'autre part le premier membre de l'inégalité (9) aura sa valeur conservée par la substitution linéaire; par suite les a_i seront changées en des coordonnées a_i qui satisféront avec les x_i' à l'inégalité (9), et qui par suite seront les coordonnées semi-normales de l'hypersphère orientée transformée par T de l'hypersphère initiale. Le théorème 3 est ainsi complètement démontré.

8. Remarque. Revenons à l'espace projectif P. Les hypersphères improprement réelles sont représentées dans cet espace par les points intérieurs à la quadrique Q; leurs coordonnées semi-normales sont assujetties à l'inégalité $x_0 > 0$. Les hypersphères proprement réelles orientées sont représentées par les points extérieurs à Q. L'hypersphère étant donnée, repré-

[3]) Dans l'espace P l'intérieur de la quadrique Q est connexe, ce qui démontre la possibilité de passer d'une hypersphère improprement réelle à une autre sans que l'hypersphère cesse d'être improprement réelle.

[4]) Si le point considéré est le point à l'infini, la somme $x_0 + x_{n+1}$ est positive pour ce point comme pour tous les points à distance finie. Le point à l'infini peut être considéré comme la limite de points à distance finie pour les transformés duquel on aura $x_0' + x_{n+1}' > 0$; il en sera donc du même pour le transformé du point à l'infini.

sentée par un point M, les points de cette hypersphère sont représentés par les points de Q situés sur l'hyperplan polaire de M par rapport à Q. Cet hyperplan polaire sépare Q en deux régions qui représentent les deux régions dans lesquelles l'hypersphère donnée sépare l'espace anallagmatique; suivant qu'on choisit l'un ou l'autre de ces régions, on obtient les deux orientations possibles de l'hypersphère; les coordonnées semi-normales des deux hypersphères orientées se déduisent les unes des autres par un changement de signe. On peut dire que les points de P extérieurs à Q sont *géométriquement orientables.* Il est intéressant de montrer qu'on peut passer par continuité d'une hypersphère orientée à la même hypersphère orientée d'une autre manière. Par exemple la famille d'hypersphères d'équation:

$$\sin t \cdot x_{n+1} - 2 \cos t \cdot x_1 - \sin t \cdot x_0 = 0 ,$$

quand on fait varier t de t_0 à $t_0 + \pi$, permet de passer par continuité d'une hypersphère orientée intérieurement (si $0 < t_0 < \pi$) à la même hypersphère orientée extérieurement [5]).

Les points de P extérieurs à Q sont donc géométriquement orientables, tandis qu'il rien est pas de même pour les points intérieurs à Q.

III

Invariants anallagmatiques. Résolution d'un problème général

9. *Invariant anallagmatique de deux hypersphères unitaires.* Soient a_i et b_i les coordonnées semi-normales de ces deux hypersphères (improprement réelles ou proprement réelles orientées). Le produit scalaire des deux hypersphères est

$$(10) \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n - \frac{1}{2} (a_0 b_{n+1} - b_0 a_{n+1}) = \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2 R R'},$$

où R et R' au dénominateur, désignent les rayons des deux hypersphères supposées orientées, précédés du signe $+$ ou

[5]) Remarquons que cette suite d'hypersphères orientées contient un hyperplan pour $t = k\pi$ (k entier).

du signe — suivant qu'elles sont orientées intérieurement ou extérieurement. Si l'une des hypersphères, par exemple la première, est improprement réelle, R désigne le *module* du rayon. Le produit scalaire (10) est évidemment un invariant anallagmatique de la figure formée par les deux hypersphères et c'est le *seul invariant qui soit rationnel par rapport aux coordonnées de deux hyperspheres.*

On remontre ici une circonstance curieuse qui ne se présente pas en géométrie euclidienne réelle. Si on suppose les deux hypersphères orientées, *on pourrait être tenté de penser que la figure obtenue en changeant à chacune son orientation est anallagmatiquement égale à la première* puisqu'elles ont le même invariant. Mais ce n'est pas toujours vrai. Par exemple si les deux hypersphères sont extérieures l'une à l'autre et orientées toutes les deux intérieurement, le domaine de chacune n'a aucun point commun avec celui de l'autre, tandis que si on les oriente extérieurement, leurs deux domaines ont une infinité de points communs; *on ne peut pas passer de la première figure à la seconde par une transformation anallagmatique* [6]).

Ajoutons la remarque que l'orthogonalité de deux hypersphères se traduit par la nullité de l'invariant anallagmatique correspondant; par suite deux hypersphères improprement réelles ne peuvent jamais être orthogonales.

10. Les considérations précédentes conduisent à se poser le problème général suivant.

Problème. *Déterminer $p \leqslant n+1$ hypersphères unitaires $S_1, S_2, \dots, S_p$ purement réelles, orientées, indépendantes, connaissant les produits scalaires a_{ij} des couples S_i, S_j d'hypersphères inconnues* [7]).

---

[6]) Dans l'ouvrage de M. Blaschke sur la géométrie différentielle le volume consacré à la géométrie anallagmatique réelle à trois dimensions fait rentrer dans le groupe des transformations anallagmatiques l'opération qui consiste à changer l'orientation de toutes les sphères proprement réelles; mais c'est un expédient qui est contraire à la nature des choses.

[7]) Pour $p = n + 2$, on démontrerait facilement que la forme $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_{n+2})$ introite dans le numéro 10 doit être décomposable en la somme de $n+1$ carrés positifs et 1 carré négatif; cette condition est nécessaire et suffisante.

Nous supposons que les coordonnées des S_i sont semi-normales.

Les hypersphères indépendantes $S_1, S_2, \ldots, S_p$ déterminent un système linéaire d'hypersphères rentrant toutes dans l'expression $u_1 S_1 + u_2 S_2 + \ldots + u_p S_p$. Nous appellerons *forme fondamentale* de ce système linéaire la forme quadratique $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ qui représente le carré scalaire de l'hypersphère générale du système.

Lemme. Si la forme quadratique $\Phi(u_1, \ldots, u_p)$ est décomposée en une somme de carrés de formés linéaires indépendantes, cette décomposition donne naissance

soit à p carrés positifs,

soit à $p-1$ carrés positifs et un négatif,

soit à $p-1$ carrés positifs.

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour la possibilité du problème.

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que les conditions énoncées sont nécessaires; il suffit pour cela de démontrer que le nombre des carrés positifs dans la décomposition de la forme Φ en carrés est au moins égale à $p-1$. Si non en effet on pourrait extraire du système linéaire considéré au moins deux hyperphères distinctes orthogonales entre elles dont chacune serait ou improprement réelle ou de rayon nul. Le produit scalaire de ces deux hypersphères serait nécessairement nul; d'après la remarque de la fin du n⁰ 9 elles seraient donc constituées par deux hypersphères de rayon nul ou par une hypersphère de rayon nul et une hypersphère improprement réelle. La première hypothèse est impossible car le produit scalaire de deux points distincts ne peut être nul [8]); la seconde l'est également car elle entrainerait l'existence d'un point réel situé sur une hypersphère improprement réelle, c. q. f. d.

Pour démontrer que les conditions sont suffisantes nous allons passer en revue les trois cas possibles.

---

[8]) Si ces deux points sont à distance finie, le produit scalaire est $-\frac{1}{2} x_0 x_0' d^2 < 0$, d étant la distance. Si l'un des points (le second par exemple) est à l'infini, le produit scalaire est $-\frac{1}{2} x_0 x_0' < 0$.

1 Cas. La forme fondamentale $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_p)$ se décompose en p carrés positifs. Supposons

$$\Phi(u_1, u_2, \dots, u_p) = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_p^2,$$

et soit

$$(11) \qquad v_i = \alpha_i^1 u_1 + \alpha_i^2 u_2 + \dots + \alpha_i^p u_p \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

le déterminant des α_i^j étant différent de zéro.

Choisissons dans l'espace anallagmatique, ce qui est toujours possible, p hypersphères unitaires indépendantes orientées, orthogonales entre elles: $A_1, A_2, \dots, A_p$, et posons

$$S_i = \alpha_1^i A_1 + \alpha_2^i A_2 + \dots + \alpha_p^i A_p \quad (i = 1, 2, \dots, p);$$

on aura

$$u_1 S_1 + u_2 S_2 + \dots + u_p S_p = v_1 A_1 + v_2 A_2 + \dots + v_p A_p$$

et on constate immédiatement que les produits scalaires des hypersphères S_i, S_j sont égaux aux valeurs données a_{ij} dans l'énoncé du problème. Si maintenant au lieu des hypersphères unitaires orthogonales $A_1, A_2, \dots, A_p$ on prend un autre système analogue $B_1, B_2, \dots, B_p$, on peut toujours passer par une transformation anallagmatique des premières aux dernières [9]); on obtient ainsi une infinité de solutions du problème, toutes également anallagmatiques entre elles.

Dans le 1 Cas, le problème est donc possible et toutes ses solutions sont anallagmatiquement égales entre elles.

2 et 3 Cas. La forme fondamentale $\Phi(u_1, \dots, u_p)$ se décompose en $p-1$ carrés positifs et 1 carré négatif ou en $p-1$ carrés positifs. Dans chacun des deux cas il existe dans le système linéaire $u_1 S_1 + u_2 S_2 + \dots + u_p S_p$ au moins une hypersphère de rayon nul

$$S_0 = \xi_1 S_1 + \xi_2 S_2 + \dots + \xi_p S_p.$$

Si l'on change l'orientation de toutes les sphères $S_1, S_2, \dots, S_p$, on aurait une autre solution du problème, mais cette seconde

---

[9]) Dans l'espace projectif P, on peut toujours passer, par une transformation projective laissant la quadrique Q invariante, de la figure formée de $n+2$ points conjugués deux à deux par rapport à Q à une autre figure analogue quelconque.

solution ne peut être anallagmatiquement égale à la première car on pourrait passer par une transformation anallagmatique T de S_0 à $-S_0$, or les coordonnées semi-normales du point S_0 ne peuvent être anallagmatiquement égales à celles de $-S_0$.

Par un raisonnement analogue à celui du premier cas on démontrerait que *le problème comporte deux familles de solutions anallagmatiquement égales dans chacune des deux familles, mais non anallagmatiquement égales quand on passe d'une famille à l'autre.*

Cas particulier. Supposons $p=2$ et soit a le produit scalaire des deux hypersphères orientées unitaires inconnues S_1 et S_2. On a ici

$$\Phi(u_1, u_2) = u_1^2 + 2a\, u_1 u_2 + u_2^2 = (u_1 + a\, u_2)^2 + (1 - a^2)\, u_2^2.$$

Si $a^2 < 1$, auquel cas les deux hypersphères S_1 et S_2 sont sécantes, le problème ne comporte que des solutions anallagmatiquement égales. Si $a^2 = 1$ ou > 1, les deux hypersphères sont extérieures ou intérieures ou tangentes; le changement d'orientation de S_1 et de S_2 donne une figure non anallagmatiquement égale à la première.

SUR UN PRINCIPE TOPOLOGIQUE DE L'EXAMEN DE L'ALLURE ASYMPTOTIQUE DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Par TADEUSZ WAŻEWSKI (Kraków) [1])

Avant d'entrer dans les détails nous expliquerons rapidement en quoi consiste le principe en question et nous esquisseront l'idée directrice de sa démonstration dans un cas particulier. Nous ferons voir, par un simple exemple, la possibilité de son application à l'examen de l'allure asympotique des intégrales. — Considérons le système d'équations

$$(0,1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, \dots, n)$$

où t est considérée comme temps. Nous supposons, pour fixer les idées, que les f_i soient continues partout et que par chaque point passe une intégrale unique de ce système.

Soit ω un ensemble ouvert à $n+1$ dimensions (borné ou non) dont la frontière F se compose d'un nombre fini de surfaces $S_1, \dots, S_k$ dont le plan tangent varie d'une façon continue avec la position du point de contact. Nous supposons qu'aucune intégrale du système ne soit tangente à aucune de ces surfaces.

Soit I l'intégrale *saturée* (c.-à-d. prolongée vers la droite et vers la gauche autant que ce soit possible) passant par P_0. Soit $Demi_{(+)} I(P_0)$ la demi-intégrale droite saturée issue de

---

[1]) J'ai communiqué oralement les résultats un peu moins généraux le 18. III., le 28. III. et le 29. V. 1947 respectivement au cours d'une séance de la Soc. Pol. de Math. (Cracovie), de la Soc. d. Sciences de Varsovie et du Congrès des Math. Pol. à Cracovie. Une note sur ce sujet a paru dans les Rendiconti dei Lincei (août 1947, Série VIII, t. III, p. 210).

$P_0 = (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ et contenant les points de I pour lesquels $t \geqslant t_0$.

Soit A le morceau de I correspondant à l'intervalle ouvert $t-\varepsilon < t < t_0$ et soit B le morceau de I correspondant à l'intervalle $t_0 < t < t_0 + \varepsilon$. Soit enfin ω^* l'ensemble des points n'appartenant pas à $\omega + F$.

Si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit alors un et un seulement des cas suivants est possible lorsque $P_0 \epsilon F$:

I) $A \subset \omega^*$, $B \subset \omega$. [P_0 point d'entrée stricte]

II) $A \subset \omega$, $B \subset \omega^*$. [P_0 point de sortie stricte]

III) $A \subset \omega$, $B \subset \omega$. [P_0 point de glissement intérieur]

IV) $A \subset \omega^*$, $B \subset \omega^*$. [P_0 point de glissement extérieur].

Si tous les points de F sont points d'entrée stricte (catégorie I), alors une intégrale qui est entrée une fois dans ω ne le quittera jamais, c.-à-d. $Demi_{(+)} I(P_0) \subset \omega$ lorsque $P_0 \epsilon \omega$.

Or, au cours d'une recherche sur l'allure des intégrales au voisinage du point singulier d'un système d'équation différentielles, j'ai été conduit au *problème suivant*:

La frontière F contenant à la fois des points d'entrée et des points de sortie (catégorie I et II) *existe-t-il, à l'intérieur de ω, des points P_0, tels que $Demi_{(+)} I(P_0) \subset \omega$?*

Or j'ai obtenu d'abord quelques résultats sur ce sujet en me servant de la notion d'homologie [2]) et ensuite de celle de l'indicatrice de Kronecker. Ce n'est, cependant, qu'en les rattachant à la notion du *rétracte* due à M. Borsuk que j'ai réussi de les faire revêtir une forme plus générale, plus simple, facile à démontrer et maniable dans les applications.

Voici d'abord la notion du rétracte.

V. Soient, dans un espace quelconque, deux ensembles A et B, tels que $A \subset B$ et soit P un point variable de cet espace. On dit qu'une transformation $Q = T(P)$ effectue une rétraction de B en A lorsqu'elle est continue dans B et si

---

[2]) Communiqué le 25. II., 1947 au cours d'une séance de la Société Polon. de Math. (Section de Cracovie).

(0,2) $T(P) \in A$ lorsque $P \in B$,

(0,3) $T(P) = P$ lorsque $P \in A$.

Si une telle transformation existe A est appelé un rétracte de B.

VI. *Exemple.* Soit S une sphère à n dimensions de centre C et de rayon $r > 0$, et soit F sa frontière. Les points P de S et ceux de F sont respectivement caractérisés par les relations: *distance* $(C, P) \leqslant r$ et *distance* $(C, P) = r$.

On sait que F n'est pas un rétracte de S [3]).

VII. Voici maintenant notre théorème dans un cas particulier. Gardons les hypothèses précédentes sur le système (0,1), sur l'ensemble ω et sur sa frontière F. Supposons que la catégorie III *(points de glissement intérieur)* soit *vide* et désignons par *S la classe des points de sortie stricte* (catégorie II). Soit Z un ensemble jouissant des propriétés suivantes

$$Z \subset \omega + S,$$

$$ZS \text{ n'est pas un rétracte de } Z,$$

$$ZS \text{ est un rétracte de } S.$$

Ceci étant admis il existe un point $P_0 \in Z - S$, tel que

$$Demi_{(+)}\, I(P_0) \subset \omega.$$

L'intégrale du système (0,1) *issue de* P_0 *et prolongée vers la droite autant que ce soit posible restera toujours à l'intérieur de* ω sans jamais rencontrer la frontière F de ω.

Voici l'idée directrice de la démonstration. Soit $P \in \omega$ et appelons (d'après POINCARÉ) conséquent de P le premier

---

[3]) Dans le cas contraire il existerait une transformation $Q = T(P)$ effectuant une rétraction de S en P. Soit $U = W(Q)$ la transformation subordonnant à chaque point de F son point antipode. La transformation $U = W(T(P))$ est continue dans S, elle transforme S en sa partie et on n'a jamais $P = W(T(P))$, ce qui est contraire au théorème de M. Brouwer sur les points fixes.

point Q en lequel $Demi_{(+)} I(P)$ rencontre F. Un tel point Q peut exister ou non. Posons

$$Q = \text{conséquent de } P = C(P).$$

Il suffira de prouver qu'il existe un point $P_0 \in Z - S$, tel que $C(P_0)$ n'existe pas. Supposons qu'un tel point P_0 n'existe pas et envisageons la transformation

$$(0,4) \qquad Q = K(P)$$

où $K(P) = C(P)$ lorsque $P \in Z - S$ et $K(P) = P$ lorsque $P \in ZS$. Soit $R = T(Q)$ une transformation effectuant la rétraction de S en ZS. La transformation $R = T(K(P))$ effectue, contrairement à une des prémisses du théorème, la rétraction de Z en ZS. Ceci sera évident lorsque l'on aura démontré la continuité de la transformation (0,4) (cf. § 8, lemme 3) [4]).

VIII. *Exemple.* Considérons le tube ω

$$|x| < 1, \; |y| < 1, \; -\infty < t < +\infty.$$

La frontière F de ω se compose de quatres faces E_1, E_2, E_3, E_4 situées respectivement sur les plans $x = -1$, $x = +1$, $y = -1$ et $y = +1$. Considérons le système

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y, t).$$

Supposons que f et g soient continues partout, que par tout point passe une intégrale unique de ce système et que l'on ait

$$x f(x, y, t) < 0 \text{ sur } E_1 + E_2 ; \quad y g(x, y, t) > 0 \text{ sur } E_3 + E_4 .$$

On vérifie facilement que la catégorie III est vide et que la catégorie II constitue l'ensemble $S = E_3 + E_4 - E_1 - E_2$.

---

[4]) En supposant que $K(P)$ soit continue *par hypothèse* (et non seulement que $C(P)$ soit continue, ce qui constitue une erreur s'étant faufilée dans notre note dans les Rendiconti dei Linci, août 1947) on obtient un théorème plus général, car l'on peut alors supprimer l'hypothèse *Sortie* (ω, Ω) = *Sortie stricte* (ω, Ω) intervenant dans les Théorèmes 1—4 du présent travail. Cette généralisation est peu maniable.

Soient τ er ξ deux nombres fixes avec $|\xi|<1$, et soient A et B les points des coordonnées $(\xi, -1, \tau), (\xi, +1, \tau)$. Désignons par Z le segment fermé aux extrémités A et B. L'ensemble ZS se compose des points A et B, l'ensemble ZS n'est donc pas un rétracte de Z. En posant $T(Q)=A$ lorsque $Q \in E_3$ et $T(Q)=B$ lorsque $Q \in E_4$ on voit que la transformation $R=T(Q)$ effectue une rétraction de S en ZS. L'ensemble ZS est donc un rétracte de S. En vertu de notre théorème il existe sur le segment $Z-S=Z-A-B$ un point P_0, tel que la demi-intégrale issue de P_0, prolongée à droite de P_0 autant que ce soit possible ne sortira jamais du tube ω et existera, par suite, pour tous les t de l'intervalle $\tau \leqslant t < +\infty$. En faisant varier ξ on voit qu'il existe même au moins ∞^1 demi-intégrales de telle sorte [5]).

En prenant un tube $|x|<\varphi(t)$, $|y|<\psi(t)$ avec $\varphi(t)\to 0$, $\psi(t)\to 0$ pour $t\to+\infty$ dont les faces courbes E_1, E_2, E_3, E_4 remplissent des hypothèses analogues aux précédentes, on conclut que sur tout segment (A,B) (analoguement situé) il existe un point P_0 duquel sort une intégrale $x=x(t)$, $y=y(t)$ pour laquelle $|x(t)|<\varphi(t)$, $|y(t)|<\psi(t)$ lorsque $\tau\leqslant t<+\infty$. On aura $x(t)\to 0$, $y(t)\to 0$ lorsque $t\to+\infty$.

Cet exemple montre que notre théorème se prête bien à l'étude de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles et par suite de leurs allure au voisinage des points singuliers. Il faudra, dans chaque cas particulier, construire l'ensemble ω d'une façon adaptée à la nature du problème asymptotique. Cette construction revient, pour la plupart des cas, à la construction de certaines inégalités différentielles dont les solutions fournissent les faces limitant l'ensemble ω.

Le Théorème 1 (§ 9) (plus général que le théorème qui vient d'être énoncé) conduit d'une part aux Théorèmes 2 (§ 11) et 3 (§ 12) sur l'*existence des intégrales asymptotiques* et, d'une

---

[5]) Dans ce cas l'ensemble de points situés sur les demi-intégrales de cette sorte possède le nombre de dimensions $d\geqslant 2$ (au sens de Menger). Il se pose le problème de savoir s'il en est analoguement dans les cas pareils relatifs à l'espace à $p+q$ dimensions $(p+q>2)$. M. Kuratowski a indiqué une démonstration rapide dont il résulte que la réponse est affirmative.

autre part, au Théorème 4 (§ 13) sur l'*existence des solutions d'un problème aux limites* (analogue au problème de Sturm). Le Théorème 5 (§ 15) indique les conditions suffisantes (importantes pour les applications) pour que la catégorie III soit vide. Les § 17 et 18 concernent l'extension des théorèmes précédents au cas des variables complexes et au cas, le moins important, où l'on n'admet pas que par tout point de ω passe une intégrale unique du système d'équations différentielles.

Les §§ 1—7 sont consacrés aux notations et définitions et, en outre, à l'énumération de ces propriétés des intégrales des équations différentielles grâce auxquels réussit dans le § 8 la démonstration que la transformation $Q=K(P)$ (cf. 0,4) est continue. En passant en revue ces propriétés (dépendance des intégrales du point initial, leur prolongeabilité jusqu'à la frontière etc.) on se rendra facilement compte des conditions sous les quelles *nos résultats peuvent être étendus aux familles de courbes quelconques appartenant même aux espaces abstraits.* C'est en partie pour cette raison que nous avons cru utile d'entrer de si près dans les détails de la démonstration que la transformation $Q=K(P)$ est continue, bien que cette continuité soit presqu'évidente pour un lecteur familiarisé avec la théorie des équations différentielles.

§ 1. *Notation vectorielle.* Dans les §§ 1—16 nous parlerons exclusivement des points réels $(t,x_1,\dots,x_n)$ appartenant à l'espace E_{n+1} à $n+1$ dimensions.

Soit $A=(0,\dots,0)$ l'origine des coordonnées et $P=(t,x_1,\dots,x_n)$ un point quelconque. Le point P et le vecteur $\overrightarrow{AP}$ seront appelés associés. Ils possèdent les mêmes coordonnées.

Nous désignerons par P, *sans aucune distinction*, le point P et le vecteur $\overrightarrow{AP}$.

Ce point et ce vecteur seront donc considérés comme identiques en un certain sens. Soit

$$P'=(t',x_1',\dots,x_n').$$

Nous poserons

$$P'-P=\overline{AP}'-\overline{AP}=(t'-t,\ x_1'-x_1,\dots,x_n'-x_n).$$

Nous désignerons par

$$|P|$$

le module $|\overrightarrow{AP}|$ du vecteur $\overrightarrow{AP}$. On aura donc

$$|P| = \sqrt{t^2 + \Sigma x_i^2}.$$

Pour la distance des points P et P' on aura la formule

$$\text{distance}\,(P, P') = |P' - P| = \sqrt{(t' - t)^2 + \Sigma (x_i' - x_i)^2}.$$

§ 2. Voici quelques notations et propositions relatives à la théorie des ensembles qui nous servirons dans la suite.

I. Soit $\gamma \subset E_{n+1}$ un ensemble ouvert. La classe de tous les points frontières de γ sera appelée *frontière absolue de* γ et elle sera désignée par

$$\textit{front abs}\,(\gamma).$$

II. Soit une suite de points P_ν

$$P_\nu \in \gamma \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Nous dirons qu'une telle *suite* P_ν *tend vers la frontière absolue de* γ et nous écrirons

(2,1) $$P_\nu \rightarrow \textit{front abs}\,(\gamma)$$

lorsqu'il n'existe aucune suite partielle P_{α_ν} qui tendrait vers un point appartenant à γ.

III. Soient ω et Ω deux ensembles *ouverts*, tels que

$$\omega \subset \Omega \subset E_{n+1}.$$

Nous posons par définition

(2,2) $$\textit{front}\,(\omega, \Omega) = \Omega\ \textit{front abs}\,(\omega).$$

Cet ensemble, composé de ceux points frontières, de ω qui appartiennent à Ω, sera nommé *frontière de* ω *relative* à Ω.

Nous poserons par définition

(2,3) $$\omega^* = \textit{extérieur}\,(\omega, \Omega) = \Omega - \omega - \textit{front}\,(\omega, \Omega).$$

Cet ensemble sera appelé extérieur de ω relatif à Ω.

IV. Si l'on relie le point $A \epsilon \omega$ et $B \epsilon \omega^*$ par une courbe continue $C \subset \Omega$ alors C aura au moins un point commun avec *front* (ω, Ω).

§ 3. Considérons le système des équations

$$(3,1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = f^i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Nous énoncerons relativement à ce système l'hypothèse suivante:

Hypothèse ***H***. Les *fonctions réelles* $f^i(t, x_1, \dots, x_n)$ des *variables réelles* $t, x_1, \dots, x_n$ sont *continues* dans un ensemble ouvert Ω.

Par chaque point de Ω il passe une *intégrale unique* du système (3,1).

L'ensemble ω est un ensemble ouvert et l'on a

$$(3,2) \qquad \omega \subset \Omega.$$

Cette hypothèse servira de premisse dans la plupart des propositions et des théorèmes qui suivent.

Il nous sera commode d'écrire le système (3,1) et ses intégrales sous la forme vectorielle (cf. § 1). Posons à cet effet

$$X = (x_1, \dots, x_n),\ X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$
$$\frac{dX(t)}{dt} = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt}\right),$$
$$F(X, t) = (f^1(X, t), \dots, f^n(X, t)).$$

Le système (3,1) pourra être écrit sous la forme

$$(3,1\ bis) \qquad \frac{dX}{dt} = F(X, t).$$

Convention ***C***. Nous n'envisagerons les fonctions $f^i(t, x_1, \dots, x_n)$ que pour les points appartenant à Ω. Nous nous occuperons exclusivement des parties des intégrales du système (3,1) qui sont situées dans Ω. Sans restreindre la généralité de nos résultats nous pouvons donc supposer que *les fonctions* f^i, intervenant dans le système (3,1), *soient déterminées*

exclusivement dans Ω et qu'elles ne soient pas définies pour aucun point étranger à Ω.

Cette convention mettra automatiquent hors du débat, les parties éventuelles des intégrales du système (3,1) qui seraient situées en dehors de Ω.

§ 4. **Terminologie et notations relatives à l'integrale générale du système** (3,1). Soit

(4,1) $$P = (\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n), \; P \in \Omega.$$

Nous désignerons par

(4,2) $$X = \Phi(t; P)$$

l'intégrale du système (3,1) passant par le point (4,1). L'équation de cette intégrale peut être écrite sous la forme

$$X = \Phi(t; P), \quad t = t.$$

En posant

(4,3) $$Q = (t, X)$$ $$I(t, P) = (t, \Phi(t; P))$$

nous pourrons écrire l'équation (4,2) sous la forme

(4,4) $$Q = I(t, P)$$ [6].

On a évidemment

(4.5) $$I(t_0, P) = P \text{ lorsque } P = (t_0, p_1, \ldots, p_n) \in \Omega.$$

Il existe, comme on le sait bien, un intervalle ouvert (borné ou non)

(4,6) $$a < t < \beta,$$

[6]) Cette forme sera plus commode que la forme (4,2) parce que le point $Q = I(t, P)$ appartient à l'espace à $n+1$ dimensions des points $(t, x_1, \ldots, x_n)$ et *au même* espace appartient aussi l'ensemble Ω. Le point $X = \Phi(t; P)$ appartient par contre à la projection de Ω sur l'hyperplan à n dimensions $(x_1, \ldots, x_n)$.

tel que
$$I(t,P)\in\Omega \text{ lorsque } \alpha<t<\beta,$$
tandis que $I(\alpha,P)$ et $I(\beta,P)$ ne sont pas du tout déterminés ou bien ils sont déterminés cependant ils n'appartiennent pas à Ω mais à sa frontière absolue. Cet intervalle sera appelé *intervalle saturé* relativement à P,Ω et au système (3,1). Il sera désigné par

(4,7) $$\Delta(P,\Omega) \text{ ou bien par } \Delta(P).$$

L'extrémité gauche et droite de $\Delta(P)$ sera désignée respectivement par

(4,8) $$\alpha(P) \text{ et } \beta(P).$$

Les intervalles définis respectivement par les inégalités $\lambda\leqslant t\leqslant\mu$; $\lambda<t<\mu$; $\lambda\leqslant t<\mu$; $\lambda<t\leqslant\mu$ seront désignés respectivement par $[\lambda,\mu]$; (λ,μ); $[\lambda,\mu)$ et $(\lambda,\mu]$. Pour l'intervalle saturé $\Delta(P)$ on aura donc

(4,9) $$\Delta(P,\Omega)=\Delta(P)=(\alpha(P),\beta(P)).$$

Cet intervalle est ouvert et l'on a pour $P\in\Omega$

(4,10) $$-\infty\leqslant\alpha(P)<\beta(P)\leqslant+\infty.$$

Soit δ un sous ensemble de $\Delta(P)$
$$\delta\subset\Delta(P).$$

Nous désignerons par

(4,11) $$I(\delta,P)$$

la classe de tous les points $Q=I(t,P)$ pour lesquels $t\in\delta$. L'ensemble $I(\delta,P)$ représente donc le morceau de l'intégrale $I(t,P)$ que l'on obtient lorsque t parcourt l'ensemble δ. Nous posons

(4,12) $$I(P)=I(\Delta(P),P).$$

L'ensemble $I(P)$ représente l'intégrale issue de P et saturée relativement à Ω. On a

(4,13) $$I(P)\subset\Omega.$$

La classe de points qui contient le point P (avec $P \epsilon \Omega$) et tous les points de $I(P)$ qui sont situés à droite de P sera dite *demi-intégrale saturée droite* issue de P. Elle sera désignée par

(4,14) $$Demi_{(+)} I(P, \Omega) \text{ ou bien } Demi_{(+)} I(P).$$

On définit pareillement la demi-intégrale saturée gauche

(4,15) $$Demi_{(-)} I(P, \Omega) \text{ ou bien } Demi_{(-)} I(P).$$

Si
$$P = (t_0, p, \ldots, p_n) \epsilon \Omega$$
on a

(4,16) $$Demi_{(+)} I(P) = I([t_0, \beta(P)), P),$$

(4,17) $$Demi_{(-)} I(P) = I((\alpha(P), t_0], P).$$

On a

(4,18) $$Demi_{(+)} I(P) \to front\ abs\ (\Omega).$$

Ceci veut dire que pour toute suite t_ν

(4,19) $$t_0 < t_\nu < \beta(P),\ t_\nu \to \beta(P)$$

on a (cf. (2,1)):

(4,20) $$I(t_\nu, P) \to front\ abs\ (\Omega)$$ [7].

On a pareillement

(4,21) $$Demi_{(-)} I(P) \to front\ abs\ (\Omega).$$

§ 5. **Dépendance de l'intégrale $I(t,P)$ de son point initial.** Il nous sera commode d'écrire les théorèmes bien connus sur la dépendance de l'intégrale [du système (3,1)] de son point initial en nous servant de la symbolique adoptée plus haut.

Admettons l'Hypothèse H du § 3. Nous aurons alors les propriétés suivantes.

---

[7]) Cf. E. Kamke, *Differentialgleichungen reelles Funktionen* (Leipzig 1930), p. 135, Satz 2.

I. Soit

(5.1) $$P_\nu \in \Omega, \cdot P_0 \in \Omega, P_\nu \to P_0.$$

On sait[8]) que la suite des intégrales $I(t, P_\nu)$ tend dans $\Delta(P_0)$ *presque uniformément* vers $I(t, P_0)$ (pour $\nu \to +\infty$) et on écrit

(5,2) $$I(t, P_\nu) \Rrightarrow I(t, P_0) \text{ dans } \Delta(P_0).$$

Ceci veut dire que la propriété suivante a lieu: Si γ et δ sont deux nombres finis, tels que on a (pour l'intervalle fermé et borné $[\gamma, \delta]$)

(5,3) $$[\gamma, \delta] \subset \Delta(P_0)$$

alors 1⁰) à partir d'un indice assez grand l'intégrale $I(t, P_\nu)$ est définie pour tous les $t \in [\gamma, \delta]$, c.-à-d.

(5,4) $$[\gamma, \delta] \subset \Delta(P_\nu) \text{ lorsque } \nu \text{ est assez grand}$$

et 2⁰) abstraction faite d'un nombre fini d'indices ν initiaux, on a

(5,5) $$I(t, P) \Rightarrow I(t, P_0) \text{ dans } [\gamma, \delta]$$

c.-à-d. $I(t, P_\nu)$ tend *uniformément* vers $I(t, P_0)$ dans l'intervalle $[\gamma, \delta]$.

II. En se servant de la notion de la distance (cf. § 1) on peut écrire (5,5) sous la forme

(5,6) $$|I(t, P_\nu) - I(t, P_0)| \Rightarrow 0 \text{ dans } [\gamma, \delta].$$

III. Admettons que Θ soi un sous-ensemble ouvert de Ω, que les nombres γ et δ soient finis et que

$$[\gamma, \delta] \subset \Delta(P_0),\ P_0 \in \Omega,\ P_\nu \in \Omega,\ P_\nu \to P_0,\ I([\gamma, \delta], P_0) \subset \Theta.$$

Ceci étant admis on aura pour les indices ν suffisamment grands

(5,7) $$I([\gamma, \delta], P_\nu) \subset \Theta.$$

C'est une conséquence facile de la proposition I énoncée tout à l'heure.

---

[8]) Cf. E. Kamke, l. c. p. 150, Satz 4.

IV. En posant, en particulier, $\gamma = \delta$ nous obtenons la propriété suivante·

Si l'ensemble ouvert Θ fait partie de Ω et

$$\gamma \in \Delta(P_0),\ P_0 \in \Theta,\ P_\nu \in \Omega,\ P_\nu \to P_0,$$

alors, pour les indices suffisamment grands, $I(\gamma, P_\nu)$ est bien déterminé [9]) et

$$I(\gamma, P_\nu) \in \Theta,\ I(\gamma, P_\nu) \to I(\gamma, P_0).$$

§ 6. Définition du conséquent et de l'antécédent d'un point dans le cas où l'on admet l'Hypothèse *H*.

Soit P un point appartenant à ω

(6,1) $$P \in \omega.$$

Relativement à la demi-intégrale saturée (droite) issue de P deux cas sont possibles:

1⁰) ou bien $Demi_{(+)} I(P)$ n'a aucun point commun avec la *front* (ω, Ω) (cf. (2,2)),

2⁰) ou bien en s'avançant sur $Demi_{(+)} I(P)$, à partir de P, vers la droite on rencontre pour la première fois [10]) la *front* (ω, Ω) en un point Q. Ce point Q sera alors appelé *conséquent* de P relatif à ω et Ω et au système (3,1) et il sera désigné par

(6,2) $$\textit{conséq}\,(P; \omega, \Omega)\ ^{11)}.$$

Si ce point existe pour un $P \in \omega$ alors

(6,3) $$\textit{conséq}\,(P; \omega, \Omega) \in \textit{front}\,(\omega, \Omega).$$

Définition de l'ombre gauche (relative à ω, Ω et au système (3,1)).

Nous désignons par

(6,4) $$\textit{ombre gauche}\,(\omega, \Omega)$$

la classe de tous les points $P \in \omega$ pour lesquels *conséq* $(P; \omega, \Omega)$ existe.

---

[9]) C.-à-d. $I(t, P_\nu)$ est déterminé pour $t = \gamma$ ou bien, ce qui revient au même $\gamma \in \Delta(P_\nu)$.

[10]) Un point en lequel cette rencontre a lieu pour la première fois existe, car *front*(ω, Ω) est fermé relativement à Ω.

[11]) Cette notion est due à H. Poincaré.

Voici quelques propositions évidentes relatives à ces notions:

(6,5) I. $\textit{ombre gauche}\,(\omega, \Omega) \subset \omega \subset \Omega$.

II. Soit: $P = (t_0, p_1, \dots, p_n)$, $Q = (t_1, q_1, \dots, q_n)$,

$$P \in \omega \text{ et } Q \in \Omega.$$

Cela posé, la condition nécessaire et suffisante pour que

$$Q = \textit{conséq}\,(P; \omega, \Omega)$$

consiste évidemment en ce que l'on ait

$$t_0 < t_1, \; Q = I(t_1, P), \; I([t_0, t_1), P) \subset \omega, \; Q \in \textit{front}\,(\omega, \Omega).$$

III. Soit: $P \in \omega$. Cela posé chacune de relations

$$[\textit{Demi}_{(+)}\, I(P)] \cdot \textit{front}\,(\omega, \Omega) = 0,$$
$$\textit{Demi}_{(+)}\, I(P) \subset \omega$$

constitue la condition nécessaire et suffisante pour que le $\textit{conséq}\,(P; \omega, \Omega)$ n'existe pas.

§ 7. Points de sortie et points de sortie stricte.

En gardant l'hypothèse H nous introduirons deux définitions nouvelles et nous indiquerons quelques propositions qui s'y rattachent.

I. *Définition*. Tout point Q pour lequel il existe un point $P \in \omega$, tel que

$$Q = \textit{conséq}\,(P; \omega, \Omega)$$

sera appelé ***point de sortie de*** ω relatif à Ω et au système (3,1).

La classe de tous les points Q de cette sorte sera appelée ensemble de points de sortie de ω (relatif à Ω et au système (3,1)).

Cet ensemble sera désigné par

(7,1) $$\textit{Sortie}\,(\omega, \Omega).$$

II. Dans l'Hypothèse H on a évidemment

(7,2) $$\textit{Sortie}\,(\omega, \Omega) \subset \textit{front}\,(\omega, \Omega).$$

III. Soit $Q = (t_0, q_1, \dots, q_n)$. Cela posé la condition nécessaire et suffisante pour que

$$Q \in \textit{Sortie}\,(\omega, \Omega)$$

consiste en ce qu'il existe un nombre positif $\varepsilon_0 > 0$, tel que

$$I([t_0 - \varepsilon, t_0), Q) \subset \omega$$

et que l'on ait en outre

$$Q \in front\,(\omega, \Omega).$$

IV. *Définition.* Soit $Q = (t_0, q_1, \dots, q_n)$ et supposons que

$$Q \in Sortie\,(\omega, \Omega).$$

Le point Q sera dit *point de sortie stricte* de ω (relatif à Ω et au système (3,1)) lorsqu'il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$, tel que tous les points de l'intégrale $I(Q)$ (issue de Q) qui correspondent aux valeurs de t situés dans l'intervalle $t_0 < t \leqslant t_0 + \varepsilon$, sont contenus dans l'ensemble (cf. 2,3)

$$\omega^* = extérieur\,(\omega, \Omega) = \Omega - \omega - front\,(\omega, \Omega).$$

La classe de tous les points de sortie stricte de ω sera désignée par

(7,3) $$Sortie\ stricte\,(\omega, \Omega).$$

V. Dans l'Hypothèse H on a évidemment

(7,4) $$Sortie\ stricte\,(\omega, \Omega) \subset Sortie\,(\omega, \Omega) \subset front\,(\omega, \Omega).$$

VI. Admettrons l'Hypothèse H et supposons que

$$Q = (t_0, q_1, \dots, q_n),\ Q \in front\,(\omega, \Omega).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que

$$Q \in Sortie\ stricte\,(\omega, \Omega)$$

consiste évidemment en ce qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$, tel que

$$I([t_0 - \varepsilon, t_0), Q) \subset \omega,\ I((t_0, t_0 + \varepsilon], Q) \subset \omega^*$$

$$\text{où } \omega^* = extérieur\,(\omega, \Omega) = \Omega - \omega - front\,(\omega, \Omega).$$

§ 8. Continuité de la transformation $Q = K(P)$.

Le but du présent paragraphe est la démonstration du *Lemme* 3 inséré à la fin de ce paragraphe et établissant la continuité de la transformation $Q = K(P)$. Cette transformation intervenait dans la démonstration d'un cas particulier du

théorème principal qui vient d'être esquissée dans l'introduction (cf. (0,4) p. 282). Or pour un lecteur familiarisé avec les raisonnements usuels, relatifs à l'allure des intégrales dans les cas le plus simples, le Lemme 3 est presqu'évident et la lecture de la démonstration des lemmes préparatoires 1 et 2 que nous allons énoncer, est superflue.

Lemme 1. Admettons l'Hypothèse H. Si

(8,1) $$P_0 \in \omega, \ \textit{conség}\,(P_0; \omega, \Omega) \in \textit{Sortie stricte}\,(\omega, \Omega)$$

alors la transformation

(8,2) $$Q = C(P) = \textit{conség}\,(P; \omega, \Omega)$$

(envisagée évidemment là où elle existe, c.-à-d. dans l'*ombre gauche* (ω, Ω)) est continue au point P_0.

Démonstration. Posons

$$P_0 = (t_0, p_1^0, \ldots, p_n^0), \ P_\nu = (t_\nu, p_1^\nu, \ldots, p_n^\nu)$$

et supposons que

$$P_0 \in \textit{ombre gauche}\,(\omega, \Omega), \ P_\nu \in \textit{ombre gauche}\,(\omega, \Omega), \ P_\nu \to P_0.$$

Il suffit de prouver que

(8,3) $$\textit{conség}\,(P_\nu; \omega, \Omega) \to \textit{conség}\,(P_0; \omega, \Omega).$$

On a

(8,4) $$t_\nu \to t_0$$

et (cf. 4,5)

(8,5) $$P_0 = I(t_0, P_0), \ P_\nu = I(t_\nu, P_\nu).$$

Posons

$$Q_0 = \textit{conség}\,(P_0; \omega, \Omega).$$

L'intégrale $I(t, P_0)$ passe par Q_0 pour une valeur τ de t. On a donc (cf. § 6, II)

(8,6) $$Q_0 = \textit{conség}\,(P_0; \omega, \Omega) = I(\tau, P_0), \ t_0 < \tau, \quad I([t_0, \tau), P_0) \subset \omega.$$

Comme ω est ouvert et $I(t,P_0)$ est continue en t il en résulte que pour les $\delta>0$ suffisamments petits on aura

(8,7) $$I([t_0-\delta, \tau-\delta], P_0) \subset \omega.$$

$\Delta(P_0)$ étant l'intervalle (ouvert) saturé de $I(t,P_0)$ et $\alpha(P_0)$ et $\beta(P_0)$ étant l'extrémité gauche et droite de cet intervalle (cf. 4,7 et 4,8) on a

$$\alpha(P_0)<t_0<\tau<\beta(P_0).$$

Soit $\eta>0$ un nombre positif arbitraire. Or en vertu de (8,1)

$$Q_0 \in \textit{Sortie stricte}\,(\omega, \Omega).$$

Il existe donc, en raison de (8,7) et de la proposition VI du § 7 un nombre $\delta>0$ si petit que

(8,8) $$\alpha(P_0)<t_0-\delta<t_0<\tau-\delta<\tau<\tau+\delta<\beta(P_0).$$

(8,9) $$\begin{cases} I([t_0-\delta, \tau-\delta], P_0) \subset \omega, \; I([t_0-\delta, \tau+\delta], P_0) \subset \Omega, \\ I([\tau-\delta, \tau), P_0) \subset \omega, \\ I((\tau, \tau+\delta], P_0) \subset \omega^* = \Omega - \omega - \mathit{front}\,(\omega, \Omega), \end{cases}$$

$$\textit{diamètre de } I([\tau-\delta, \tau+\delta], P_0)<\eta.$$

La dernière inégalité exprime que

(8,10) $$|I(t', P_0)-I(t'', P_0)|<\eta \text{ [12] lorsque } \begin{matrix} \tau-\delta \leqslant t' \leqslant \tau+\delta \\ \tau-\delta \leqslant t'' \leqslant \tau+\delta. \end{matrix}$$

Pour les indices ν assez grands on aura (cf. 8,4 et (8,8)

(8,11) $$\alpha(P_0)<t_0-\delta<t_\nu<\tau-\delta<\tau<\tau+\delta<\beta(P_0).$$

En s'appuyant sur les propositions III et IV du § 5 on déduit des relations (8,8) et (8,9) les relations suivantes valables pour les indices ν suffisamment grands

$$I([t_0-\delta, \tau+\delta], P_\nu) \subset \Omega, \; I([t_0-\delta, \tau-\delta], P_\nu) \subset \omega,$$

(8,12) $$I(\tau-\delta, P_\nu) \in \omega, \; I(\tau+\delta, P_\nu) \in \omega^*,$$

d'où, en raison de (8,11), il résulte que

(8,13) $$I([\tau-\delta, \tau+\delta], P_\nu) \subset \Omega, \; I([t_\nu, \tau-\delta], P_\nu) \subset \omega.$$

---

[12] $|I(t',P_0)-I(t'',P_0)|$ désigne la distance des points $I(t',P_0)$ et $I(t'',P_0)$ (cf. § 1).

En vertu de (8,12) l'arc $I([\tau-\delta, \tau+\delta], P_\nu)$ coupe la *front* (ω, Ω) (cf. § 2, IV). Faisons t parcourir l'intervalle $[\tau-\delta, \tau+\delta]$ vers la droite, à partir de $\tau-\delta$. La *front* (ω, Ω) étant fermée relativement à Ω, il existe, en vertu de la première relation (8,13), la plus petite valeur de t, appelons-la τ_ν, telle que

(8,14) $$I(\tau_\nu, P_\nu) \in \mathit{front}\,(\omega, \Omega).$$

On aura

(8,15) $$\tau-\delta<\tau_\nu<\tau+\delta,$$

et $I([\tau-\delta, \tau_\nu), P_\nu) \subset \omega$. En rapprochant la dernière relation de la deuxième relation (8,13) on obtient

$$I([t_\nu, \tau_\nu), P_\nu) \subset \omega.$$

De cette relation et de la relation (8,14) il résulte que le point $I(\tau_\nu, P_\nu)$ est le conséquent de $I(t_\nu, P_\nu)$ relatif à ω, Ω et au système (3,1) (cf. la définition du conséquent dans le § 6). On a donc (cf. 8,5)

(8,16) $$I(\tau_\nu, P_\nu) = \mathit{cons\acute{e}q}\,(P_\nu; \omega, \Omega).$$

Comme $[\tau-\delta, \tau+\delta] \subset \Delta(P_0)$ (cf. 8,8) on a, en vertu de (5,5) la suivante convergence uniforme

$$I(t, P_\nu) \Longrightarrow I(t, P_0) \text{ dans } [\tau-\delta, \tau+\delta],$$

donc, pour les indices ν assez grands on aura (cf. 5,6)

$$|I(t, P_\nu) - I(t, P_0)| < \eta \text{ lorsque } t \in [\tau-\delta, \tau+\delta],$$

d'où, en vertu de (8,15), il vient que

$$|I(\tau_\nu, P_\nu) - I(\tau_\nu, P_0)| < \eta.$$

L'inégalité (8,10) donne (cf. 8,15)

$$|I(\tau_\nu, P_0) - I(\tau, P_0)| < \eta$$

donc

$$|I(\tau_\nu, P_\nu) - I(\tau, P_0)| < 2\eta,$$

d'où, en vertu de (8,6) et (8,16), il résulte que

$$|\mathit{cons\acute{e}q}\,(P_\nu; \omega, \Omega) - \mathit{cons\acute{e}q}\,(P_0; \omega, \Omega)| < 2\eta$$

lorsque ν est suffisamment grand. Comme $\eta>0$ est un nombre arbitraire, la relation (8,3) se trouve ainsi démontrée.

Lemme 2. Admettons l'Hypothèse H et supposons que

$$P_\nu = (t_\nu, p_1^\nu, \ldots, p_n^\nu) \in \textit{ombre gauche}\,(\omega, \Omega),$$

(8,17) $$P_0 = (t_0, p_1^0, \ldots, p_n^0) \in \textit{Sortie stricte}\,(\omega, \Omega),$$

$$P_\nu \to P_0.$$

Nous affirmons que

(8,18) $$\textit{conséq}\,(P_\nu; \omega, \Omega) \to P_0.$$

Démonstration. On a: $t_\nu \to t_0, P_\nu \in \omega$ et (cf. 4,5)

(8,19) $$I(t_0, P_0) = P_0.$$

Soit $\eta > 0$ un nombre positif quelconque. En s'appuyant sur (8,17), on conclut aisément (cf. VI, § 7) à ce qu'il existe un nombre $\delta > 0$, tel que

$$I([t_0 - \delta, t_0 + \delta], P_0) \subset \Omega,\ I([t_0 - \delta, t_0), P_0) \in \omega,$$
$$I((t_0, t_0 + \delta], P_0) \in \omega^*,\ I(t_0 + \delta, P_0) \in \omega^*,$$

(8,20) $$\textit{diamètre}\text{ de } I([t_0 - \delta, t_0 + \delta], P_0) < \eta.$$

En s'appuyant sur les propositions III et IV du § 5 on en conclut que les relations suivantes ont lieu pour les indices ν suffisamment grands: $t_0 - \delta < t_\nu < t_0 + \delta$,

$$I([t_0 - \delta, t_0 + \delta], P_\nu) \subset \Omega,\ I(t_0 - \delta, P_\nu) \in \omega,$$

(8,21) $$I(t_0 + \delta, P_\nu) \in \omega^*.$$

On a (cf. 4,5 et 6,4)

$$I(t_\nu, P_\nu) = P_\nu \in \omega.$$

Cette relation et la relation (8,21) conduisent à la conclusion (cf. § 2, IV et la définition du conséquent) qu'il existe un nombre τ_ν, tel que

(8,22) $$t_0 - \delta < \tau_\nu < t_0 + \delta,\ \textit{conséq}\,(P_\nu; \omega, \Omega) = I(\tau_\nu, P_\nu).$$

On a la convergence uniforme (cf. 5,5)

$$I(t, P_\nu) \Rightarrow I(t, P_0) \text{ dans } [t_0 - \delta, t_0 + \delta],$$

d'où il résulte que

$$|I(\tau_\nu, P_\nu) - I(\tau_\nu, P_0)| \to 0.$$

Pour les indices ν assez grands on aura

$$|I(\tau_\nu, P_\nu) - I(\tau_\nu, P_0)| < \eta.$$

En raison de (8,20)

$$|I(\tau_\nu, P_0) - I(t_0, P_0)| < \eta$$

et par suite

$$|I(\tau_\nu, P_\nu) - I(t_0, P_0)| < 2\eta$$

d'où (cf. 8,19 et 8,22)

$$|\mathit{conséq}\,(P_\nu; \omega, \Omega) - P_0| < 2\eta.$$

La relation (8,18) est ainsi démontrée.

Lemme 3. Admettons l'Hypothèse H, posons

$$S = \mathit{Sortie}\,(\omega, \Omega)$$

et supposons que tout point de sortie soit un point de sortie stricte, c.-à-d. que

$$\mathit{Sortie}\,(\omega, \Omega) = \mathit{Sortie\ stricte}\,(\omega, \Omega).$$

Définissons la transformation

$$Q = K(P)$$

de la façon suivante:

$$K(P) = \mathit{conséq}\,(P; \omega, \Omega) \text{ lorsque } P \in \mathit{ombre\ gauche}\,(\omega, \Omega),$$

$$K(P) = P \text{ lorsque } P \in S.$$

Ceci étant supposé nous affirmons que la transformation $Q = K(P)$ est continue dans l'ensemble

$$W = \mathit{ombre\ gauche}\,(\omega, \Omega) + S$$

et que

(8,23) $$K(P) \in S \text{ lorsque } P \in W.$$

Démonstration. La continuité en question résulte immédiatement des Lemmes 1 et 2. La relation (8,23) apparaît comme une conséquence immédiate de la définition de $K(P)$. [Il suffit de remarquer que $\mathit{conséq}\,(P; \omega, \Omega) \in \mathit{Sortie}\,(\omega, \Omega)$ lorsque $P \in \mathit{ombre\ gauche}\,(\omega, \Omega)$ (cf. § 6)].

§ 9. **Théorème 1.** Admettons l'Hypothèse H (cf. § 3) relativement au système (3,1). Supposons que chaque point de sortie (relatif à ω, Ω et au système 3,1) soit un point de sortie stricte (cf. § 7) c.-à-d. que

(9,1) $$Sortie\,(\omega, \Omega) = Sortie\ stricte\,(\omega, \Omega) = S.$$

Supposons que pour les ensembles Z et S_1 aient lieu les relations:

(9,2) $$S_1 \subset S$$

(9,3) $$Z \subset \omega + S_1$$

(9,4) ZS_1 est un rétracte de S_1 [13])

(9,5) ZS_1 n'est pas un rétracte de Z.

Ceci étant admis il existe au moins un point

(9,6) $$P_0 = (t_0, p_1^0, \dots, p_n^0),$$

tel que

(9,7) $$P_0 \in Z - S_1$$ [14])

et qu'ou bien

(9,8) $$conséq\,(P_0; \omega, \Omega) \in S - S_1$$

ou bien

(9,9) $conséq\,(P_0; \omega, \Omega)$ n'existe pas [15]).

La relation (9,9) exprime que la partie de l'intégrale issue de P_0, partie située à droite de P_0 est entièrement contenue dans ω et ne peut, par conséquent, jamais toucher à la $front\,(\omega, \Omega)$ (cf. 2,2).

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que notre théorème soit faux. On aura donc

(9,10) $$conséq\,(P; \omega, \Omega) \subset S_1 \text{ lorsque } P \in Z - S_1.$$

---

[13]) Cf. la définition du rétracte à la page 208, V.

[14]) Ceci revient à ce que l'on a à la fois $P_0 \in Z$ et $P_0 \in \omega$.

[15]) Cette relation est équivalente à ce que $Demi_{(+)} I(P_0) \subset \omega$. Elle est aussi équivalente à la relation $[Demi_{(+)} I(P_0)] \cdot front\,(\omega, \Omega) = 0$ (cf. § 6, III).

Le *conséq* $(P;\omega,\Omega)$ existera donc pour tous les points $P \in Z - S_1$. Il s'ensuit (cf. la définition 6,3) que

(9,11) $$Z - S_1 \subset \textit{ombre gauche } (\omega, \Omega).$$

On aura donc en raison de (9,1)

$$Z = (Z - S_1) + (ZS_1) \subset \textit{ombre gauche } (\omega, \Omega) + S = W.$$

c.-à-d.

(9,12) $$Z \subset W$$

avec

$$W = \textit{ombre gauche } (\omega, \Omega) + S.$$

Nous utiliserons la transformation

$$Q = K(P)$$

intervenant dans le Lemme 3 du § 8 et définie par les conditions

(9,13) $K(P) = \textit{conséq}\,(P;\omega,\Omega)$ lorsque $P \in$ *ombre gauche* (ω, Ω)

(9,14) $$K(P) = P \text{ lorsque } P \in S.$$

La transformation $Q = K(P)$ est continue sur W(cf. Lemme 3 du § 8) est, à plus forte raison sur Z (cf. 9,12).

En raison de (9,14) et (9,2) on a:

$$K(P) = P \text{ lorsque } P \in ZS_1$$

donc

$$K(P) \in S_1 \text{ lorsque } P \in ZS_1.$$

En vertu de (9,10) et (9,13) on a

$$K(P) \in S_1 \text{ lorsque } P \in Z - S_1.$$

De ces trois relations il résulte que

(9,15) $$K(P) \in S_1 \text{ lorsque } P \in Z \quad \text{et } K(P) = P \text{ lorsque } P \in ZS_1.$$

Or ZS_1 étant un rétracte de S_1 (cf. 9,4) il existe une transformation

$$R = U(Q)$$

qui effectue une rétraction de S_1 en ZS_1.

Cette transformation est donc continue pour les $Q \in S_1$ et l'on a

$$\text{(9,16)} \quad \begin{aligned} U(Q) &\in ZS_1 \text{ lorsque } Q \in S_1, \\ U(Q) &= Q \text{ lorsque } Q \in ZS_1. \end{aligned}$$

Formons la transformation composé

$$R = T(P)$$

où

$$T(P) = U(K(P)).$$

En vertu de (9,15) et (9,16) la transformation $R = T(P)$ est définie et continue sur Z et l'on a

$$\begin{aligned} T(P) &\in ZS_1 \text{ lorsque } P \in Z \\ T(P) &= P \text{ lorsque } P \in ZS_1. \end{aligned}$$

Cette transformation effectue donc une rétraction de Z sur ZS_1, ce qui est impossible en vertu de (9,5). Nous voyons ainsi que l'hypothèse que notre théorème soit faux conduit à une contradiction, ce qui termine la démonstration.

§ 10. Énoncé d'un problème relatif à l'existence des demi-intégrales asymptotiques et d'un problème aux limites.

Conservons l'Hypothèse H du § 3.

I. *Définition d'une demi-intégrale du système* (3,1) *asymptotique relativement aux ensembles* ω *et* Ω. Une demi-intégrale du système (3,1) (issue d'un point P) sera dite asymptotique relativement aux ensembles ω et Ω si elle est contenue dans ω.

Il s'agit évidemment des demi-intégrales *saturées* relativement à Ω, c.-à-d. tendant vers la frontière absolues de Ω lorsque t tend vers une extrémité de l'intervalle saturé $\Delta(P)$ (cf. 4,14 et 4,15).

La demi-intégrale droite $Demi_{(+)}\, I(P)$ est donc asymptotique relativement à ω et Ω alors et seulement alors lorsque

$$\text{(10,1)} \quad Demi_{(+)}\, I(P) \subset \omega.$$

Pour une telle demi-intégrale on aura forcément (cf. 4,18)

$$Demi_{(+)}I(P) \rightarrow front\ abs(\Omega).$$

II. *Problème d'existence des demi-intégrales asymptotiques relativement à ω et Ω:*

Z étant un ensemble, tel que $Z \subset \omega + front(\omega, \Omega)$, existe-t-il un point $P \epsilon Z$ tel que $Demi_{(+)}I(P)$ soit asymptotique relativement à ω et Ω, ou, ce qui revient au même, telle que la relation (10,1) ait lieu?

III. *Le rapport du problème précédent aux problèmes classiques relatifs à l'allure asymptotique des intégrales.*

Dans la plupart des problèmes classiques on demande s'il existe des intégrales possédant certaines propriétés asymptotiques, propriétés qui sont exprimées *analytiquement*. On demande, par exemple, s'il existe une intégrale tendant vers le point singulier ou bien se condensant sur un cycle limite. On demande s'il existe des intégrales dont la distance de l'origine croît plus vite ou plus lentement qu'une fonction donnée (par exemple $e^{\alpha t}$) lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Or ces problèmes pourront être considérés, comme *cas particuliers du problème précédent à condition que l'on réussit de construire l'ensemble* ω, tel que toute intégrale asymptotique relativement à ω et Ω (au sens de la définition précédente) jouisse forcément aussi des propriétés asymptotiques données sous la forme analytique. Du caractère de ces conditions analytiques dépendra la forme et la configuration de l'ensemble ω qu'il faudra construire. La construction de l'ensemble ω est souvent équivalente à la *construction de fonctions remplissant certaines inégalités différentielles.*

En construisant ω il faudra évidemment prendre soin que les prémisses des théorèmes qui vont suivre soient remplies par ω.

IV. *Un problème aux limites.* Soient Z et T deux ensembles contenus dans $\omega + front(\omega, \Omega)$. Existe-t-il deux points $A \epsilon Z$ et $B \epsilon T$ qui puissent être reliés par un arc partiel d'une intégrale du système (3,1), par un arc situé dans $\omega + front(\omega, \Omega)$?

V. *L'application du Théorème* 1 (§ 9) *à la solution de ces deux problèmes.*

Le Théorème 1 conduit à l'alternative suivante (cf. 9,8 et 9,9)

(10,2) ou bien $conséq(P_0; \omega, \Omega) \in S - S_1$,

(10,3) ou bien $conséq(P_0; \omega, \Omega)$ n'existe pas.

Or en introduisant certaines conditions supplémentaires dans le Théorème 1 on peut exclure ou bien la relation (10,2) ou bien (10,3). Si la relation (10,3) n'est pas possible le Théorème 1 donne une réponse affirmative au problème aux limites (avec $T = S - S_1$). Si, au contraire la relation (10,2) n'est pas possible alors la relation (10,3) entraîne la relation $Demi_{(+)} I(P_0) \subset \omega$ et le problème d'existence d'une demi-intégrale asymptotique relative à ω et Ω admet une réponse affirmative.

Nous compléterons, dans la suite, le Théorème 1 par certaines hypothèses supplementaires de façon à obtenir une réponse affirmative à l'un ou à l'autre de ces deux problèmes.

§ 11. Théorème 2 sur l'existence des intégrales asymptotiques (relatives à ω et Ω).

Admettons l'Hypothèse H relativement au système (3,1) et supposons que tout point de sortie (relatif à ω, Ω et au système 3,1) soit un point de sortie strict c.-à-d. que

$$Sortie(\omega, \Omega) = Sortie\ stricte(\omega, \Omega) = S.$$

Soit Z un ensemble, tel que

$$Z \subset \omega + S,$$

ZS est un rétracte de S,

ZS n'est pas un rétracte de Z.

Ceci étant admis il existe au moins un point P_0, tel que

$$P_0 \in Z - S \quad (\text{c.-à-d. } P \in Z\omega)$$

et que la demi-intégrale droite issue de P_0 et saturée relativement à Ω soit contenue dans ω. Ceci veut dire que

(11,1) $$Demi_{(+)} I(P_0) \subset \omega.$$

Cette demi-intégrale constitue une demi-intégrale asymptotique relative à ω et Ω (cf. définition en question dans le § 10).

Démonstration. Posons, dans le Théorème 1 du § 9 $S_1 = S$. L'ensemble $S - S_1$ étant vide la relation (9,8) ne sera pas possible. La relation (9,9) aura donc forcément lieu et cette relation entraîne (11,1) (cf. § 6, III).

§ 12. Condition d'existence d'une demi-intégrale asymptotique (relative à ω et Ω) qui est prolongeable jusqu'à $t = +\infty$.

Définition. Soient deux ensembles ouverts ω et Ω, tels que

$$\omega \subset \Omega .$$

Nous dirons que la *front abs* (ω) (cf. § 2, I) touche à la *front abs* (Ω) exclusivement sur le plan

$$t = b \text{ (où } b \text{ est fini ou bien } b = +\infty)$$

lorsque pour toute suite de points

$$P_\nu = (t_\nu, p_1^\nu, \ldots, p_n^\nu)$$

telle que

$$P_\nu \in \omega, \ P_\nu \to \textit{front abs}\,(\Omega) \text{ (cf. 2,1)}$$

on a

$$t_\nu \to b .$$

Théorème 3. Admettons l'Hypothèse H relativement au système (3,1) et supposons que la *front abs* (ω) touche la *front abs* (Ω) exclusivement sur le plan $t = b$ (où b est fini ou bien $b = +\infty$). Supposons que

$$\textit{Sortie}\,(\omega, \Omega) = \textit{Sortie stricte}\,(\omega, \Omega) = S ,$$

$$Z \subset \omega + S ,$$

$$ZS \text{ est un rétracte de } S ,$$

$$ZS \text{ n'est pas rétracte de } Z .$$

Ceci étant admis il existe un point

$$P_0 = (t_0, p_1^0, \ldots, p_n^0),$$

tel que

$$P_0 \in Z - S \text{ (c.-à-d. } P_0 \in Z\omega)$$

et que

$$\textit{Demi}_{(+)}\, I(P_0) \subset \omega . \tag{12,1}$$

Cette demi-intégrale est asymptotique relativement à ω et Ω (cf. § 10) et l'on a

(12,2) $$I(t, P_0) \in \omega \text{ lorsque } t_0 \leqslant t < b.$$

Démonstration. Nous avons désigné par $\Delta(P) = (\alpha(P), \beta(P))$ l'intervalle saturé de $I(t,P)$ (cf. 4,7 et 4,8). En vertu de (12,1) et de la définition de

$$Demi_{(+)}\, I(P_0) \text{ on a}$$

$$I(t, P_0) \in \omega \text{ lorsque } t_0 \leqslant t < \beta(P_0)$$

Afin d'établir (12,2) il suffit de prouver que $\beta(P_0) = b$. Soit

(12,3) $$t_0 < t_\nu < \beta(P_0),\ t_\nu \to \beta(P).$$

On aura (cf. 4,20) $I(t_\nu, P_0) \to$ *front abs* (Ω) et en vertu de la définition précédente il s'ensuira que $t_\nu \to b$ ce qui rapproché de (12,3) donne $b = \beta(P)$. Notre théorème se trouve ainsi ramené au Théorème 2 (§ 11).

§ 13. Une condition d'existence des solutions d'un problème aux limites.

Définition. Supposons que les ensembles ω et Ω soient ouverts et que $\omega \subset \Omega$. Nous dirons que la *front abs* (ω) ne touche pas à la *front abs* (Ω) lorsqu'il n'existe aucune suite de points P_ν, telle que $P_\nu \in \omega$, $P_\nu \to$ *front abs* (Ω) (cf. 2,1).

Théorème 4. Admettons l'Hypothèse H relativement au système (3,1) et supposons que la *front abs* (ω) ne touche pas à la *front abs* (Ω) (cf. la définition précédente). Supposons que

$$\textit{Sortie}\,(\omega, \Omega) = \textit{Sortie stricte}\,(\omega, \Omega) = S\,,$$

et que pour les ensembles Z et T on ait les relations:

$$T \subset S,\ Z \subset \omega + S - T,$$

$$Z(S-T) \text{ est un rétracte de } S-T,$$

$$Z(S-T) \text{ n'est pas un rétracte de } Z.$$

Ceci étant admis il existe deux points $P_0 \in Z\omega$ et $Q_0 \in T$ qui peuvent être reliés par un arc $[P_0, Q_0]$ d'une intégrale du système (3,1) lequel arc est situé dans ω à l'exception du point Q_0. Cet arc constitue la solution du problème au limites du § 10 (page 302, IV).

Démonstration. Posons

$$S_1 = S - T.$$

Nous vérifions facilement que les prémisses du Théorème 1 (§ 9) sont remplies.

Or pour tout $P \in \omega$ le *conség* $(P; \omega, \Omega)$ existe, car la *front abs* (ω) ne touche pas à la *front abs* Ω. Posons, en effet, $P = (t_0, p_1^0, \ldots, p_n^0)$ et choisissons la suite t_ν de façon que $t_0 < t_\nu < \beta(P)$, $t_\nu \to t_0$ (cf. 4,7 et 4,8). On aura (cf. 4,20)

$$I(t_\nu, P) \to \textit{front abs}\,(\Omega),$$

donc pour un certain indice $\nu = \mu$ on aura, en vertu de la définition du présent paragraphe,

$$I(t_\mu, P) \in \Omega - \omega.$$

L'arc $I([t_0, t_\mu], P)$ coupera donc la *front* (ω, Ω) (cf. § 2, IV) et, par conséquent, le *conség* $(P; \omega, \Omega)$ existe. La relation (9,9) n'est donc possible. On aura donc (cf. 9,8)

$$\textit{conség}\,(P_0; \omega, \Omega) \in S - S_1 = T.$$

Le point P_0 (cf. 9,6) et le point $Q_0 =$ *conség* $(P_0; \omega, \Omega)$ remplissent évidemment la thèse de notre théorème.

Exemple. Considérons le système

$$(13,1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \; \frac{dy}{dt} = g(x, y, t)$$

et supposons que par tout point de l'espace à trois dimensions Ω il passe une intégrale unique de ce système. Considérons le cube ω

$$|x| < 1, \; |y| < 1, \; |t| < 1$$

et désignons par $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ ses faces situées respectivement sur les plans

$$t = -1, \; x = -1, \; x = +1, \; y = -1, \; y = +1, \; t = +1.$$

La *front abs* (ω) ne touche évidemment pas à la *front abs* (Ω).

Supposons que l'on ait

$$xf(x,y,t)<0 \text{ sur } F_2 \text{ et } F_3,$$
$$yg(x,y,t)>0 \text{ sur } F_4 \text{ et } F_5.$$

On vérifie facilement que

$$S = \textit{Sortie}\,(\omega,\Omega) = \textit{Sortie stricte}\,(\omega,\Omega) =$$
$$= F_4+F_5+F_6-F_1-F_2-F_3.$$

Supposons que $|x_0|<1$, $|y_0|<1$, $|t_0|<1$ et considérons deux segments Z et T définis par les relations

(13,2) $\qquad x=x_0,\ |y|\leqslant 1,\ t=t_0$ (segment Z),

(13,3) $\qquad |x|<1,\ y=y_0,\ t=1$ (segment T).

On vérifie facilement que les ensembles ω, Ω, Z et T remplissent les prémisses du Théorème 4 relativement au système (13,1). Il existe donc deux points $P_0 \in Z\omega$, $Q_0 \in T$ qui peuvent être reliès par un arc d'une intégrale du système (13,1) lequel arc est contenu à l'intérieur du cube ω à l'exception de l'extrémité Q_0 qui est située sur la frontière de ω.

Le problème aux limites formulé dans le § 10, IV admet donc une réponse affirmative pour chaque couple des ségments Z et T qui appartiennes respectivement aux familles de segments définies par (13,2) et (13,3).

§ 14. Pente d'une fonction relative à un système d'équations différentielles.

Les théorèmes précédents sont valables sous l'hypothèse permanente que tout point de sortie soit un point de sortie strict, c.-à-d. que

(14,1) $\qquad \textit{Sortie}\,(\omega,\Omega) = \textit{Sortie stricte}\,(\omega,\Omega).$

Or dans la plupart des applications de ces théorèmes l'ensemble ω est limité par un nombre fini d'hypersurfaces dont l'hyperplan tangent dépend d'une façon continue de la position du point de contact. Ces hypersurfaces sont définies par des équations de la forme $g(t,x_1,\dots,x_n)=0$.

Il est important d'*indiquer certaines propriétés analytiques de ces fonctions g, propriétés desquelles résulte l'égalité* (14,1). Nous nous adressons à l'examen de ce sujet.

I. **Définition.** Supposons que les deuxièmes membres du système (3,1) soient continues dans un ensemble ouvert Ω, *sans supposer forcément l'unicité* des intégrales issues d'un point quelconque. Soit

(14,2) $$g(t, x_1, \dots, x_n)$$

une fonction de classe C^1 (c.-à-d. possédant des dérivées premières continues) dans l'ensemble Ω. Soit

(14,3) $$P_0 = (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$$

et soit

(14,4) $$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

une intégrale du système (3,1) issue de P_0, c.-à-d., telle que

(14,5) $$x_i^0 = x_i(t_0) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Posons

(14,6) $$\varphi(t) = g(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = g(I(t, P_0)).$$

La dérivée

(14,7) $$\varphi'(t_0)$$

sera dite *pente de la fonction $g(t, x_1, \dots, x_n)$ au point P_0 relative au système* (3,1).

En vertu de (3,1) on aura

(14,8) $$\textit{pente de } g \textit{ au point } P_0 = \varphi'(t_0) = g_t(P_0) + \sum_{n/1}^{n} g_{x_i}(P_0) f_i(P_0).$$ [16]

II. *Remarque.* Supposons que

(14,9) $$g(P_0) = 0.$$

Si la pente (14,8) est *positive* il existe évidemment un nombre $\delta > 0$, tel que

(14,10) $$\begin{aligned} g(I(t, P_0)) < 0 &\text{ lorsque } t_0 - \delta \leqslant t < t_0, \\ g(I(t, P_0)) > 0 &\text{ lorsque } t_0 < t \leqslant t_0 + \delta. \end{aligned}$$

[16]) Car $I(t_0, P_0) = P_0$.

Si cette pente négative il existe un $\delta > 0$, tel que

$$(14{,}11)\qquad \begin{aligned} &g(I(t, P_0) > 0 \text{ lorsque } t_0 - \delta \leqslant t < t_0,\\ &g(I(t, P_0) < 0 \text{ lorsque } t_0 < t \leqslant t_0 + \delta. \end{aligned}$$

§ 15. Cas de l'ensemble polyfacial régulier relativement au système (3,1).

I. *Définition*. Supposons que les fonctions

$$(15{,}1)\qquad l^\alpha(t, x_1, \dots, x_n),\ m^\beta(t, x_1, \dots, x_n),\ (\alpha = 1, \dots, p;\ \beta = 1, \dots, q)$$

soient de classe C^1 (c.-à-d. possèdent les dérivées premières continues) dans un ensemble ouvert Ω. Désignons par ω l'ensemble des points vérifiant le système des relations

$$(15{,}2)\qquad P \in \Omega,\ l^\alpha(P) < 0,\ m^\beta(P) < 0,\ (\alpha = 1, \dots, p;\ \beta = 1, \dots, q).$$

Soient L^γ et M^δ $(\gamma = 1, \dots, p;\ \delta = 1, \dots, q)$ les ensembles des points P vérifiant respectivement les relations

$$(15{,}3)\qquad \left\{ \begin{array}{c} P \in \Omega,\ l^\gamma(P) = 0,\\ l^\alpha(P) \leqslant 0,\ (\alpha = 1, \dots, p);\ m^\beta(P) \leqslant 0,\ (\beta = 1, \dots, q)\\ (\textit{ensemble } L^\gamma). \end{array} \right.$$

$$(15{,}4)\qquad \left\{ \begin{array}{c} P \in \Omega,\ m^\delta(P) = 0,\\ l^\alpha(P) \leqslant 0,\ (\alpha = 1, \dots, p);\ m^\beta(P) \leqslant 0,\ (\beta = 1, \dots, q)\\ (\textit{ensemble } M^\delta). \end{array} \right.$$

Supposons que pour $1 \leqslant \gamma \leqslant p$ la fonction $l^\gamma(P)$ ait la pente [17] positive en chaque point de L^γ et que pour $1 \leqslant \delta \leqslant q$ la fonction $m^\delta(P)$ ait la pente négative en chaque point de M^δ.

Si ces hypothèses sont remplies l'ensemble ω, défini par les relations (15,2), sera dit *ensemble polyfacial régulier* relativement au système (3,1) possédant comme *faces positives* les ensembles L^γ et comme *faces négatives* les ensembles M^δ.

Cette notion est évidemment relative aux fonctions $l^\alpha(P)$ et $m^\beta(P)$, au système (3,1) et à l'ensemble Ω. L'unicité des intégrales du système (3,1) est sans importance pour cette définition.

---

[17]) relative au système (3,1).

II. *Remarque.* L'ensemble polyfacial régulier (au sens de la définition précédente) est ouvert, car il est défini par les inégalité *strictes* (15,2) concernant les fonctions continues l^α et m^β envisagées dans l'ensemble ouvert Ω.

III. **Théorème 5.** Supposons que l'ensemble ω soit polyfacial régulier aux faces positives L^γ et négatives M^δ (cf. la définition précédente). Admettons l'Hypothèse H relativement au système (3,1) et posons

(15,5) $$S = Sortie\,(\omega, \Omega).$$

Ceci étant admis nous affirmons que l'égalité

(15,6) $$S = Sortie\,(\omega, \Omega) = Sortie\ stricte\,(\omega, \Omega)$$

(intervenant comme prémisse dans les Théorèmes 1, 2, 3 et 4) a lieu. On a en plus

(15,7) $$S = \sum_{\gamma/1}^{p} L^\gamma - \sum_{\delta/1}^{q} M^\delta.$$

On pourra donc appliquer les Théorèmes 1, 2, 3 et 4 lorsque leurs autres prémisses (concernant les ensembles Z, S_1 ou T) sont vérifiées.

Démonstration. *1-ère étape.* Nous affirmons que

(15,8) $$front\,(\omega, \Omega) \subset \sum L^\alpha + \sum M^\beta.$$

Soit en effet $P_0 \epsilon\, front\,(\omega, \Omega)$. On aura (cf. 15,2)

(15,9) $$P_0 \epsilon\, \Omega,\ l^\alpha(P_0) \leqslant 0,\ m^\beta)P_0) \leqslant 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, p;\ \beta = 1, \ldots, q).$$

Mais il ne peut pas arriver que toutes ces inégalités soient strictes: $l^\alpha(P_0) < 0$, $m^\beta(P_0) < 0$ car P_0 serait un point intérieur de ω (cf. 15,2). Parmi les inégalités larges (15,9) il y a au moins une égalité $l^\gamma(P_0) = 0$ ou $m^\delta(P_0) = 0$. On a donc $P_0 \epsilon L^\gamma$ ou bien $P_0 \epsilon M^\delta$ (cf. 15,3 et 15,4) et la relation (15,8) est ainsi établie.

2-ème étape. Nous affirmons que

(15,10) $$(\Sigma M^\beta)\ Sortie\,(\omega, \Omega) = 0\,.$$

Soit en effet $P_0 = (t_0, p_1^0, \dots, p_n^0)$ un point quelconque de M^β. Or la fonction $m^\beta(P)$ ayant au point P_0 la pente négative on aura (cf. 14,11) pour un $\delta > 0$ assez petit

$$m^\beta(I(t, P_0)) > 0 \text{ lorsque } t_0 - \delta < t < t_0.$$

En vertu de la définition (15,2) de ω le point $I(t, P_0)$ n'appartient pas à ω lorsque $t_0 - \delta < t < t_0$. Le point $I(t_0, P_0) = P_0$ n'appartient donc pas à la *sortie* (ω, Ω) (cf. § 7, III).

3-ème étape. En vertu de (7,4), (15,8) et (15,10) on a

$$\textit{sortie stricte}\,(\omega, \Omega) \subset \textit{Sortie}\,(\omega, \Omega) \subset \textit{front}\,(\omega, \Omega) - \Sigma M^\beta,$$

$$\textit{front}\,(\omega, \Omega) - \Sigma M^\beta \subset \Sigma L^\alpha + \Sigma M^\beta - \Sigma M^\beta = \Sigma L^\alpha - \Sigma M^\beta,$$

et, par suite,

$$(15,11) \quad \textit{Sortie stricte}\,(\omega, \Omega) \subset \textit{Sortie}\,(\omega, \Omega) \subset \Sigma L^\alpha - \Sigma M^\beta.$$

4-ème étape. Nous affirmons que

$$(15,12) \quad \Sigma L^\alpha - \Sigma M^\beta \subset \textit{Sortie stricte}\,(\omega, \Omega).$$

Soit en effet

$$(15,13) \quad P_0 = (t_1^0, p_1^0, \dots, p_n^0) \in \Sigma L^\alpha - \Sigma M^\beta.$$

On aura pour tous les indices α et β (cf. 15,3)

$$(15,14) \quad P_0 \in \Omega, \; l^\alpha(P_0) \leq 0, \; m^\beta(P_0) \leq 0$$

et comme P_0 n'appartient pas à ΣM^β on aura (cf. 15,4)

$$(15,15) \quad m^\beta(P_0) < 0, \; (\beta = 1, \dots, q).$$

Le point P_0 appartient aux certaines faces L^ϱ $(\varrho = \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ et n'appartient pas aux autres L^σ $(\sigma = \alpha_1', \dots, \alpha_{p-r}')$. On aura donc (cf. 15,14 et 15,3)

$$(15,16) \quad l^\varrho(P_0) = 0 \;\; (\varrho = \alpha_1, \dots, \alpha_r),$$

$$(15,17) \quad l^\sigma(P_0) < 0 \;\; (\sigma = \alpha_1', \dots, \alpha_{p-r}').$$

Or les faces L^ϱ étant positives on aura pour un $\delta > 0$ assez petit (cf. 14,10)

(15,18) $\quad l^\varrho(I(t, P_0)) < 0$ lorsque $t_0 - \delta \leqslant t < t_0$,

(15,19) $\quad l^\varrho(I(t, P_0)) > 0$ lorsque $t_0 < t \leqslant t_0 + \delta$.

La derniere inégalité donne en vertu de la définition de ω (cf. 15,2)

(15,20) $\quad I((t_0, t_0 + \delta], P_0) \epsilon \Omega - \omega - front(\omega, \Omega) = \omega^*$.

Comme $I(t_0, P_0) = P_0$, il résulte de (15,15) et (15,17) que, pour les $\delta > 0$ assez petits, on aura

$$m^\beta(I(t, P_0) < 0, \; l^\sigma(I(t, P_0)) < 0$$

lorsque $t_0 - \delta \leqslant t < t_0$. De ces inégalités et de (15,18) il résulte en vertu de la définion (15,2) de ω que

$$I([t_0 - \delta, t_0); P_0] \subset \omega.$$

Cette relation et la relation (15,20) conduisent à la conclusion que $P_0 \epsilon$ *Sortie stricte* (ω, Ω). Cette conclusion étant une conséquence de la relation (15,13), la relation (15,12) se trouve établie.

En rapprochant les relations (15,11) et (15,12) on conclut à la vérité des relations (15,6) et (15,7).

§ 16. **Extension des résultats précédents aux demi-intégrales gauches.**

Appliquons au système (3,1) le changement de variables

(16,1) $\quad \widetilde{x}_i = x_i, \; (i = 1, \ldots, n); \; t = -\widetilde{t}$.

Les points P et les ensembles ω et Ω seront transformés en $\widetilde{P}$, $\widetilde{\omega}$ et $\widetilde{\Omega}$.

Si $Q = conséq(P; \omega, \Omega)$ alors $\widetilde{Q}$ sera „l'antécédent" de $\widetilde{P}$ relativement à $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\Omega}$ et au système transformé c.-à-d.

$$\widetilde{Q} = antecéd(P; \widetilde{\omega}, \widetilde{\Omega}).$$

Les points de sortie et de sortie stricte se transformeront en points d'entrée et d'entrée stricte. Ces points formeront les classes

$$Entrée(\omega, \Omega), \; Entrée \; stricte(\omega, \Omega).$$

La demi-intégrale droite $Demi_{+} I(t, P)$ passera en la demi-intégrale gauche $Demi_{(-)} I(\widetilde{t}, \widetilde{P})$. Nous obtenons ainsi le

Théorème 6. Aux Théorèmes 1—5 correspondent des théorèmes analogues qui se rapportent aux demi-intégrales gauches. La notion de l'antécédent d'un point et celle du point d'entrée ou d'entrée stricte remplacent les notions analogues relatives aux demi-intégrales droites. Cette extension s'obtient au moyen de la transformation (16,1).

§ 17. Extension au cas des variables complexes.

Théorème 7. Les théorèmes 1—6 peuvent être étendus au cas du système (3,1) dans lequel la variable t est *réelle* et les variables x_i et les fonctions f^i sont complexes.

En effet, en décomposant les variables x_i et les fonctions f^i en leurs parties réelles et imaginaires on passe sur le terrain des variables réelles.

§ 18. Cas où l'on n'admet pas l'unicité des intégrales du système (3,1).

Remarque. Conservons la continuité des fonctions f^i dans le système (3,1) en renonçant de l'hypothèse sur l'unicité de ses intégrales. Supposons que ω soit un ensemble polyfacial régulier aux faces positives L^α et négatives M^β. Or on peut approcher uniformément dans Ω la fonction f^i par une suite de fonctions f^i_ν de classe C^∞ (d'après M. Bielecki)[18]) ou même par une suite des polynômes (d'après M. H. Whitney)[19]). On peut s'arranger de façon que les faces L^α soient positives et les faces M^β négatives par rapport à chaque système auxiliaire

$$\frac{dx_i}{dt} = f^i_\nu (t, x_1, \ldots, x_\nu) \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (\textit{système } S_\nu).$$

Pour étendre au système (3,1) par exemple le Théorème 2 il suffit de supposer accessoirement que l'ensemble Z soit borné et fermé. Le système S_ν possède alors une $Demi_{(+)} I_\nu(P_\nu, t)$ asymptotique relativement à ω et Ω avec $P_\nu \in Z$. Dans cette suite de demi-intégrales on peut choisir une suite partielle tendant presqu'uniformément vers une $\mathrm{Demi}_{+} I(P_0, t)$ du système (3,1) [avec $P_0 \in Z\omega$]. Ce sera une demi-intégrale asymptotique relativement à ω, Ω et au système (3,1).

---

[18]) Annales de la Soc. Pol. de Math. T. X, p. 33.

[19]) Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Transactions of the Amer. Math. Soc. T. 36 (1), 1934, p. 76.

SUR LA TOPOLOGIE DES ESPACES FONCTIONNELS

Par Casimir Kuratowski (Warszawa)[1]

Désignons, comme d'habitude, par $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ l'ensemble des fonctions continues $y=f(x)$ définies sur l'espace $\mathcal{X}$ tout entier et dont les valeurs appartiennent à l'espace $\mathcal{Y}$. Dans de nombreux problèmes de Topologie et d'Analyse (Fonctions analytiques, Equations différentielles) on définit — d'une façon conforme au problème envisagé — la notion de limite dans l'ensemble $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, en lui conférant ainsi le caractère d'un espace topologique. En particulier, si les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont métriques, dont le premier est compact, on „métrise" l'ensemble $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ en définissant la distance des fonctions f et g appartenant à $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ par la formule

$$(1) \qquad |f-g| = \sup |f(x)-g(x)|,$$

c. à d. que la distance des fonctions f et g est la borne supérieure des distances de $f(x)$ à $g(x)$, x parcourant l'espace $\mathcal{X}$.

Dès que la distance est définie dans l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, la notion de limite s'en déduit directement:

l'égalité $\lim\limits_{n=\infty} f_n = f$ veut dire que $\lim\limits_{n=\infty} |f_n - f| = 0$,

donc — en vertu de (1) — que la suite f_n converge uniformément vers f (dans le sens habituel du môt).

Cette méthode d'introduire une topologie dans l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ cesse d'être applicable lorsque l'espace $\mathcal{X}$ est non compact (ou l'espace $\mathcal{Y}$ non borné); dans ce cas la formule (1) peut conduire à une distance infinie.

---

[1]) Communication présentée au Congrès des Mathématiciens Polonais à Cracovie le 29. V. 1947.

Le problème s'impose de définir la notion de limite dans l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des espaces métriques arbitraires ou — plus généralement — des espaces $\mathcal{L}^*$ (espaces pourvues de la notion de limite). Nous allons montrer que ce problème se laisse resoudre en entendant par convergence d'une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots$ vers f (dans l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$) *la convergence continue* de cette suite, qui signifie que l'égalité

(2) $$\lim_{n=\infty} x_n = x$$

entraîne

(3) $$\lim_{n=\infty} f_n(x_n) = f(x)$$ [2].

Plus précisément: avec la notion de limite ainsi conçue, nous allons établir les théorèmes suivants (les espaces $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \ldots$ étant supposés $\mathcal{L}^*$):

Th. 1. *L'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est un espace $\mathcal{L}^*$.*

Th. 2. *En posant $\varphi(f, x) = f(x)$, l'opération φ est continue sur le produit cartésien $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$.*

Th. 3. *En posant $g(x, t) = f_t(x)$, la continuité de la fonction g (sur l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{T}$) équivaut à la continuité de la fonction f (qui fait correspondre à tout $t \in \mathcal{T}$ une transformation f_t de $\mathcal{X}$ en sous-ensemble de $\mathcal{Y}$)* [3].

Th. 4—6. *$\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ jouit de trois propriétés suivantes, analogues aux propriétés de la puissance en Algèbre:*

4. $$\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times \mathcal{Z}^{\mathcal{X}} \underset{\text{top}}{=} (\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})^{\mathcal{X}},$$

5. *si $\mathcal{X} = A + B$ où A et B sont fermés et disjoints, on a*

$$\mathcal{Y}^{A} \times \mathcal{Y}^{B} \underset{\text{top}}{=} \mathcal{Y}^{A+B},$$

---

[2]) La notion de convergence continue remonte à H. Hahn. Voir *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 238.

[3]) Le problème de l'équivalence de la continuité de g et de celle de f pour les espaces non compacts a été considéré par M. Fox, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), p. 429—432.

6. $$(\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}} \underset{\text{top}}{=} \mathcal{Y}^{\mathcal{X}\times\mathcal{T}},$$

la relation $M \underset{\text{top}}{=} N$ *désignant que* M *et* N *sont homéomorphes.*

Th. 7. Si l'espace $\mathcal{X}$ *est compact et* $\mathcal{Y}$ *métrique, la convergence continue dans l'espace* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ *équivaut à la convergence uniforme.*

1. Préliminaires. Rappelons qu'un ensemble (d'éléments arbitraires) est dit un *espace* $\mathcal{L}^*$ lorsque la limite $x = \lim_{n=\infty} x_n$, définie dans cet espace, satisfait aux trois conditions suivantes:

1^0 *si* $\lim_{n=\infty} x_n = x$ *et* $k_1 < k_2 < \dots$, *on a* $\lim_{n=\infty} x_{k_n} = x$,

2^0 *si pour tout* n, $x_n = x$, *on a* $\lim_{n=\infty} x_n = x$,

3^0 *si la suite* $x_1, x_2, \dots$ *ne converge pas vers* x, *elle contient une suite partielle* $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots$ *(où* $k_1 < k_2 < \dots$*) dont aucune suite partielle ne converge vers* x [4]).

Un espace $\mathcal{L}^*$ est dit *compact* lorsque chaque suite $x_1, x_2, \dots$ contient une suite partielle convergente.

$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces $\mathcal{L}^*$, leur produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, c. à d. l'ensemble des couples (x,y) où $x \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$, est un espace $\mathcal{L}^*$, en convenant que la suite de points $z_n = (x_n, y_n)$ converge vers $z = (x, y)$ lorsque $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$.

D'une façon plus générale, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$ étant une suite (finie ou infinie) d'espaces $\mathcal{L}^*$, on confère à l'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$ le caractère d'un espace $\mathcal{L}^*$ en convenant que la suite variable $z_n = [z_n^1, z_n^2, \dots]$ où $z_n^i \in \mathcal{X}_i$ converge vers la suite $z = [z^1, z^2, \dots]$ lorsqu'on a $\lim_{n=\infty} z_n^i = z^i$ pour chaque i.

2. Démonstration du th. 1. Il s'agit de prouver que l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ satisfait aux conditions 1^0—3^0.

---

[4]) Pour cette définition (et les suivantes), voir par exemple ma *Topologie* I, § 14, Monogr. Matemat. 3, Warszawa-Lwów 1933. Les espaces satisfaisant aux deux premières conditions ont été introduits par M. Fréchet sous le nom d'espaces $\mathcal{L}$ (Rend. di Palermo 22, 1906).

ad 1⁰) Soient $\lim_{n=\infty} f_n = f$ et $k_1 < k_2 < \ldots$ Il s'agit de démontrer que $\lim_{n=\infty} f_{k_n} = f$. Autrement dit: que la condition (2) entraîne

$$\lim_{n=\infty} f_{k_n}(x_n) = f(x). \tag{4}$$

Dans ce but envisageons la suite $\{z_m\}$ définie par la condition: $z_m = x_n$ pour $k_{n-1} < m \leqslant k_n$ (où $k_0 = 0$). Il vient: $\lim z_m = \lim x_n = x$ [5]). L'égalité $\lim f_m = f$ implique donc (d'après la définition de convergence continue) que

$$\lim_{n=\infty} f_m(z_m) = f(x), \text{ d'où } \lim_{n=\infty} f_{k_n}(z_{k_n}) = f(x),$$

puisque l'espace $\mathcal{Y}$ satisfait à la condition 1⁰. Comme $z_{k_n} = x_n$. la dernière égalité implique (4).

ad 2⁰) Soit $f_n = f$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Il s'agit de prouver que l'égalité (2) entraîne $\lim f(x_n) = f(x)$. Or ceci est une conséquence directe de la continuité de la fonction f.

ad 3⁰) Soit $f_1, f_2, \ldots$ une suite d'éléments de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ qui ne converge pas vers f. Il existe par conséquent une suite de points $x_1, x_2, \ldots$ qui satisfait à la condition (2) mais non à (3), c. à d. que la suite $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots$ ne converge pas vers $f(x)$. D'après la condition 3⁰ (appliquée à l'espace $\mathcal{Y}$) cela implique l'existence d'une suite d'entiers $k_1 < k_2 < \ldots$ telle qu'aucune suite partielle de la suite $\{f_{k_n}(x_{k_n})\}$ ne converge vers $f(x)$. Nous en déduirons que la suite $\{f_{k_n}\}$ ne contient aucune suite partielle qui converge vers f (ce qui achevera la démonstration).

Or supposons par impossible que $m_1 < m_2 < \ldots$ et que $\lim f_{k_{m_n}} = f$. D'après (2): $\lim x_{k_{m_n}} = x$. Donc d'après la définition de convergence continue: $\lim f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}}) = f(x)$. Mais cela contredit la définition de la suite $\{k_n\}$ puisque la suite $\{f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}})\}$ est une suite partielle de la suite $\{f_{k_n}(x_{k_n})\}$.

3. Démonstration des th. 2 et 3. D'après la définition du produit cartésien, la continuité de la fonction φ veut

[5]) On démontre en effet facilement qu'étant donnée dans un espace $\mathcal{L}^*$ une suite $\{a_n\}$ telle que $\lim a_n = a$, toute suite qui s'en obtient en répétant ses termes un nombre fini de fois converge vers a.

dire que les conditions $\lim f_n = f$ et $\lim x_n = x$ entraînent $\lim \varphi(f_n, x_n) = \varphi(f, x)$, c. à d. $\lim f_n(x_n) = f(x)$. Cette implication résulte directement de la définition de convergence continue.

Passons à la démonstration du th. 3. Il s'agit d'établir l'équivalence

$$(g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}) \equiv [f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}].$$

Admettons d'abord que $g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}$. Pour t fixe, la fonction g étant une fonction continue de la variable x, on a $f_t \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. En outre les conditions (2) et

$$\lim_{n=\infty} t_n = t \tag{5}$$

entraînent $\lim g(x_n, t_n) = g(x, t)$, c. à d. $\lim f_{t_n}(x_n) = f_t(x)$. Cela prouve que la convergence de la suite de fonctions $\{f_{t_n}\}$ vers f_t est continue. Donc

$$\lim_{n=\infty} f_{t_n} = f_t. \tag{6}$$

Nous venons de démontrer ainsi que la condition (5) implique (6). Mais cela veut dire que la fonction f est continue; en symbole: $f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}$.

Admettons en second lieu que $f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}$. L'égalité (5) implique donc (6) et celle-ci rapprochée de (2) donne $\lim f_{t_n}(x_n) = f_t(x)$ (en vertu de la convergence continue de la suite $\{f_{t_n}\}$ vers f_t). Cette dernière égalité équivaut à $\lim g(x_n, t_n) = g(x, t)$. Celle-ci est donc une conséquence des égalités (2) et (5); la fonction g est donc continue; en symbole: $g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}$.

4. Démonstration des th. 4—6. ad 4) Faisons correspondre à chaque couple de fonctions $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, $g \in \mathcal{Z}^{\mathcal{X}}$, la fonction h („à valeurs complexes") définie par la condition

$$h(x) = [f(x), g(x)]. \tag{7}$$

On constate aussitôt que la fonction h, ainsi définie, est continue, c. à d. que $h \in (\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})^{\mathcal{X}}$, et que, inversement, à chaque $h \in (\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})^{\mathcal{X}}$ correspond un couple $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, $g \in \mathcal{Z}^{\mathcal{X}}$ vérifiant l'égalité (7).

En d'autres termes: en posant $h = \varphi(f, g)$, la fonction φ transforme l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times \mathcal{Z}^{\mathcal{X}}$ en l'espace $(\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})^{\mathcal{X}}$ tout entier. Il s'agit de prouver que cette fonction est bicontinue.

Admettons que

(8) $$\lim_{n=\infty} f_n = f \text{ et } \lim_{n=\infty} g_n = g.$$

Il s'agit de montrer qu'en posant $h_n(x) = [f_n(x), g_n(x)]$, on a

(9) $$\lim_{n=\infty} h_n = h.$$

Or la condition (2) entraîne

(10) $$\lim_{n=\infty} f_n(x_n) = f(x) \text{ et } \lim_{n=\infty} g_n(x_n) = g(x),$$

c. à d. $\lim h_n(x_n) = h(x)$. D'où l'égalité (9).

La continuité de la fonction φ se trouve ainsi établie.

Pour démontrer que la fonction φ est bicontinue, admettons l'égalité (9). Rapprochée de (2), elle implique que $\lim h_n(x_n) = h(x)$, d'où les égalités (10). Il en résulte que les formules (8) sont vérifiées, c. q. f. d.

Remarque. En modifiant légèrement la démonstration, on généralise le th. 4 au cas de produit cartésien fini ou dénombrable:

$$\mathcal{Y}_1^{\mathcal{X}} \times \mathcal{Y}_2^{\mathcal{X}} \times \ldots \times \mathcal{Y}_n^{\mathcal{X}} \times \ldots \underset{\text{top}}{=} (\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots \times \mathcal{Y}_n \times \ldots)^{\mathcal{X}}.$$

ad 5) Faisons correspondre à chaque couple $f \in \mathcal{Y}^A$, $g \in \mathcal{Y}^B$, la fonction h telle que

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ pour } x \in A \\ g(x) \text{ pour } x \in B. \end{cases}$$

Les ensembles A et B étant fermés et disjoints, on constate aussitôt que la fonction h est continue: $h \in \mathcal{Y}^{A+B}$. En posant $h = \varphi(f, g)$, on prouve facilement que la fonction φ transforme l'espace $\mathcal{Y}^A \times \mathcal{Y}^B$ en l'espace $\mathcal{Y}^{A+B}$ tout entier. Il s'agit de prouver que cette fonction est bicontinue.

Admettons les formules (8) et (2) pour un point $x \in A$. Les ensembles A et B étant disjoints et fermés, tous les points x_n avec n suffisamment grand appartiennent à A. On a donc l'égalité (3), d'où $\lim h_n(x_n) = h(x)$. On parvient à la même conclusion en supposant que $x \in B$. Les formules (8) impliquent donc (9). Cela prouve la continuité de la fonction φ.

Inversement, en admettant la formule (9), on déduit de l'égalité (2), rapprochée de la condition $x \in A$, la formule (3). Donc la première égalité (8) est vérifiée. Par raison de symétrie, il en est de même de la deuxième.

La fonction φ est donc bicontinue.

ad 6) Faisons correspondre à chaque fonction $f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}$ la fonction g définie par l'identité du th. 3. Posons $g = \varphi(f)$. D'après le th. 3 la fonction φ transforme l'espace $(\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}$ en l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}$ tout entier.

Afin d'établir la continuité de la fonction φ, posons

$$\lim_{n=\infty} f^n = f \quad \text{où} \quad f^n \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}. \tag{11}$$

Posons $g_n(x, t) = f_t^n(x)$, donc $g_n = \varphi(f^n)$. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n=\infty} g_n = g, \tag{12}$$

c. à d. que les conditions (2) et (5) entraînent

$$\lim_{n=\infty} g_n(x_n, t_n) = g(x, t). \tag{13}$$

Or les conditions (11) et (5) donnent $\lim_{n=\infty} f_{t_n}^n = f_t$, d'où en vertu de (2):

$$\lim_{n=\infty} f_{t_n}^n(x_n) = f_t(x) \tag{14}$$

et cette dernière égalité équivaut à (13).

Inversement, en admettant (12), on déduit (13), donc (14), des conditions (2) et (5). Il en résulte que $\lim_{n=\infty} f_{t_n}^n = f_t$. Cette dernière égalité étant vérifiée dès que la condition (5) est remplie, on en conclut que $\lim f^n = f$. La fonction φ est donc bicontinue.

5. Démonstration du th. 7. 1⁰ *La convergence uniforme entraîne la convergence continue* (l'espace $\mathcal{X}$ étant compact ou non).

Admettons, par impossible, que la suite $\{f_n\}$ soit uniformément convergente, que l'égalité (2) soit vérifiée tandis que l'égalité (3) ne le soit pas.

La suite $\{f_n(x_n)\}$ contient alors une suite partielle $\{f_{k_n}(x_{k_n})\}$ dont aucune suite partielle ne converge vers $f(x)$. D'autre part, la suite $\{f_n\}$ étant uniformément convergente, il en est de même de la suite partielle $\{f_{k_n}\}$. Il existe par conséquent une suite d'entiers $m_1 < m_2 < \ldots$ telle que l'on a pour tout $x' \in \mathfrak{X}$:

$$|f_{k_{m_n}}(x') - f(x')| < \frac{1}{n},$$

d'où en particulier

$$|f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}}) - f(x_{k_{m_n}})| < \frac{1}{n}.$$

La fonction f étant continue par hypothèse, l'égalité (2) donne

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = f(x), \quad \text{d'où} \lim_{n=\infty} f(x_{k_{m_n}}) = f(x),$$

donc

$$\lim_{n=\infty} f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}}) = f(x),$$

contrairement à la définition de la suite $\{k_n\}$.

2⁰ *Si l'espace $\mathfrak{X}$ est compact, la convergence continue entraîne la convergence uniforme.*

Admettons que la suite $\{f_n\}$ ne soit pas uniformément convergente vers la fonction f. Il existe par conséquent un $\varepsilon > 0$, une suite de points $\{x_n\}$ et une suite d'entiers croissants $\{k_n\}$ tels que

(15) $\quad |f_{k_n}(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon$ quel que soit n.

L'espace $\mathfrak{X}$ étant compact, il est légitime d'admettre que la suite $\{x_n\}$ soit convergente, donc que l'égalité (2) soit vérifiée. La suite $\{f_n\}$ étant supposée convergente de façon continue vers f, on a $\lim f_n = f$, d'où $\lim f_{k_n} = f$ (d'après le th. 1). L'égalité (2) implique donc que

$$\lim_{n=\infty} f_{k_n}(x_n) = f(x) \tag{16}$$

et que $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = f(x)$ (la fonction f étant continue). Cette dernière égalité est incompatible avec les formules (15) et (16).

On parvient ainsi à la contradiction prévue.

6. Généralisation du th. 7. *Soient $\mathcal{X}$ un espace $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{Y}$ un espace métrique et $f, f_n \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Pour que la suite $\{f_n\}$ soit convergente de façon continue vers f, il faut et il suffit qu'elle converge uniformément sur tout sous-ensemble compact de $\mathcal{X}$.*

En effet, en supposant que la suite $\{f_n\}$ converge de façon continue vers f sur $\mathcal{X}$, la suite des fonctions partielles $f_n|A$ [6]) converge de façon continue vers $f|A$, quel que soit l'ensemble A. Par conséquent, si A est compact, la convergence de la suite $\{f_n|A\}$ est uniforme d'après 5,2⁰.

Inversement, admettons que la suite $\{f_n|A\}$ converge uniformément vers $f|A$ quel que soit l'ensemble A compact. Admettons en outre que l'égalité (2) soit vérifiée. Il s'agit de prouver que l'égalité (3) l'est également.

Désignons par A l'ensemble composé du point x et de tous les points x_n, $n = 1, 2, \ldots$ Cet ensemble étant compact [7]), la suite $\{f_n|A\}$ converge vers $f|A$ de façon continue d'après 5,1⁰. L'égalité (2) entraîne donc (3).

Remarque. Soit $\mathcal{X}$ un sous-ensemble ouvert du plan et soit $\mathcal{Y}$ le plan (complexe). Dans la Théorie des fonctions analytiques, on métrise d'habitude l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ de façon que la convergence dans cet espace signifie la convergence uniforme sur tout ensemble compact.

Comme nous venons de démontrer, ce genre de convergence équivaut à la convergence continue [8]).

---

[6]) Nous désignons par le symbole $f|A$ la fonction partielle qui s'obtient de f en restreignant la variabilité de son argument à l'ensemble A.

[7]) La compacité de l'ensemble A résulte facilement de l'énoncé suivant, valable dans tout espace $\mathcal{L}^*$ (et qui généralise la condition 1,1⁰): si $\lim x_n = x$ et si aucun terme de la suite $\{k_n\}$ n'est répété une infinité de fois, on a $\lim x_{k_n} = x$.

[8]) Cf. Carathéodory, Math. Ann. 101 (1929), p. 515.

LES ESPACES CONJUGUÉS, LEURS TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES ET INTÉGRATION PAR CONDITIONS À LA LIMITE

Par CONSTANTIN POPOVICI (Bucarest)

1. Nous appelons espaces conjugués deux séries de variétés à k dimensions appartenant à un espace à n dimensions, telles que les coordonnées des deux séries des sections de ces deux variétés satisfont aux équations

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_j \partial v_h} = \lambda_{jh} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} + \mu_{jh} \frac{\partial x_i}{\partial v_h}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \; j, h = 1, 2, \ldots, k.$$

Nous appelons transformations infinitésimales conjuguées deux congruences de courbes définies par les équations tangentielles

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_i}{a_i(x_1, \ldots, x_n)} &= \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)} \\ \frac{\delta x_i}{b_i(x_1, \ldots, x_n)} &= \frac{\delta x_n}{b_n(x_1, \ldots, x_n)} \end{aligned}$$

telles que les opérateurs

$$A(z) = a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad B(z) = b_i \frac{\partial z}{\partial x_i}$$

donnent

$$(3) \qquad \begin{aligned} A(b_i) &= \alpha a_i + \beta b_i \\ B(a_i) &= \gamma a_i + \varepsilon b_i \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nous nous sommes occupé[1]) de ces espaces dans le cas $k=1$. Les équations (1) expriment pour $n=3$ que les courbes $u=c^{te}$ et $v=c^{te}$ sont des courbes conjuguées sur toute surface dont les coordonnées x_1, x_2, x_3 satisfont à l'équation de LAPLACE

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}=\lambda\frac{\partial x}{\partial u}+\mu\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Nous avons démontré que les éléments tangentiels qui définissent les deux congruences de courbes (2) donnent, pour ces deux congruences, une famille de surfaces intégrales communes sur lesquelles les intersections avec les courbes (2) sont des courbes conjuguées, si (3) est satisfait.

Intégration par conditions à la limite

2. On peut se demander quelles sont les conditions à la limite, qui donnent une seule et unique surface dont les coordonnées x_1, x_2, x_3 satisfont à l'équation (4). Nous verrons que ce problème offre une application, cette fois pour la géométrie, qui nous fera voir, qu'il existe une infinité de solutions des équations intégrales

$$(5)\qquad S(x)+\int_c^x Z(x,y)\,S(y)\,dy=Q(x)$$

ainsi que des systèmes de pareilles équations. Elles admettent une infinité de solutions dont l'ensemble a la puissance de celui des fonctions arbitraires, même si le noyau $Z(x,y)$ est continu et admet des dérivées de tout ordre voulu (ou les noyaux sont continus etc.). Ce sont des cas où le noyau n'est pas représenté dans tout le champ d'intégration par une même expression analytique. Ces noyaux nous les avons nommé *raccomodés*[2]).

---

[1]) Sur les surfaces intégrales communes des équations différentielles. Thèse Paris 1908.

[2]) Sur les formes que doit avoir un vase qui plongé dans l'eau, la partie immergée soit une fonction donnée $x_1(x)$ de la hauteur totale x du vase. Annales de la Soc. Polon. de Math. t. XVII, 1938, p. 67—90.

Autogroupes des transformations continues

3. Le plus simple et le plus intéressant exemple des espaces conjugués c'est celui où α et ε sont nuls dans (3). Ce cas est en étroite liaison avec la question que nous avons appelé des *autogroupes*. Voilà de quoi il s'agit: *Etant donné un système de n fonctions ξ_i de $n+1$ variables $x_1, \dots, x_n, t$, trouver s'il existent n autres fonctions $a_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ telles que les ξ forment un groupe par rapport à la transformation*

$$A(\xi) = a_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi}{\partial t}. \tag{6}$$

Cela revient à la recherche des fonctions a_i telles que, quelle que soit la fonction $\Phi(a_1, \dots, a_n)$, on ait

$$a_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Psi(a_1, \dots, a_n). \tag{7}$$

Si ces fonctions a_i existent, nous dirons que nous sommes en possession d'un *autogroupe* de transformations continues.

Pour nous en renseigner, formons les expressions b_l qui résultent des équations linéaires

$$B(\xi_j) = b_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_j}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Notons

$$\Delta(\xi, x_i) = \frac{D(\xi_1, \dots, \xi_n)}{D(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, t)}. \tag{9}$$

On aura

$$b_l = \frac{\Delta(a, x_i)}{\Delta(a, t)} \tag{10}$$

car les a sont fonctions des ξ

ainsi

$$B(a_i) = 0. \tag{8'}$$

Formons les paranthèses de Poisson

$$A[B(z)] - B[A(z)] = [A(b_l) - B(a_i)] \frac{\partial z}{\partial x_l}.$$

Pour $z = a_h$, on aura, vu (8′) et (7)

$$0 = [A(b_i) - B(a_i)] \frac{\partial a_h}{\partial x_i}$$

et supposant $\Delta(a,t) \neq 0$, on aura, puisque $B(a_i) = 0$, réciproquement

(11) $$A(b_i) = 0 .$$

Les équations (8′) et (11) nous les appellons aux *intégrales réciproques*. Notons l'itération

(10′) $$\frac{\Delta(b, x_i)}{\Delta(b, t)} = \frac{\Delta^2(a, x_i)}{\Delta^2(a, t)} .$$

On aura

(12) $$\frac{\Delta^3(a, x_i)}{\Delta^3(a, t)} = \frac{\Delta(a, x_i)}{\Delta(a, t)}$$

et les n a étant fonctions des n données $\xi_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ on aura

(12′) $$\frac{\Delta^3(\xi, x_i)}{\Delta^3(\xi, t)} = \frac{\Delta(\xi, x_i)}{\Delta(\xi, t)} .$$

On voit que, si ces n expressions sont des identités, les a_i existent. Cette vérification est immédiate, car elle ne nécessite que des dérivations des fonctions données ξ_i. Il en résultent des conséquences intéressantes: 1) *Si les a forment un groupe par rapport à la transformation* $a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}$, *alors les b forment à leur tour un groupe par rapport à la transformation* $b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}$. 2) *Si les* ξ *sont algébriques, les a et b le seront aussi.* 3) *Si les* (12′) *sont des identités, alors les équations de la mécanique*

(13) $$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \xi_i(x_1, \ldots, x_n, t)$$

admettent un système d'intégrales premières

$$\xi_i(x_1, \ldots, x_n, t) = F_i\left(\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)$$

et alors le mouvement s'intègre sans aucune quadrature. $b_i = c^{\text{tes}}$ *sont les trajectoires du mouvement dont les composantes des vitesses sont* $a_i = c^{\text{tes}}$ *et réciproquement.*

Il en résulte aussi l'intégrale générale des équations réciproques:

$$
\begin{aligned}
& x_i = A_i(a_1, \ldots, a_n) + B_i(b_1, \ldots, b_n), \quad i = 1, \ldots, n, \\
(14) \qquad & t = T(a_1, \ldots, a_n) + \mathcal{T}(b_1, \ldots, b_n), \\
& \varrho_j(a_1, \ldots, a_n) = \sigma_j(b_1, \ldots, b_n), \quad j = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

avec $4n+2$ fonctions arbitraires à n variables chacune.

La surface $\bar{x}_i = A_i$, $\bar{t} = T$ glisse sur la surface $\bar{\bar{x}}_i = B_i$, $\bar{\bar{t}} = \mathcal{T}$ et réciproquement, suivant la loi exprimée par les intégrales communes $\varrho_j = \sigma_j$.

Problèmes à la limite des congruences conjuguées

4. Limitons nous d'abord au cas de trois dimensions. Soient x_1, x_2, x_3 trois fonctions de u et v satisfaisant à l'équation

$$
(4) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v}
$$

ces trois fonctions représentent les coordonnées d'une surface sur laquelle les courbes $u = c^{\text{tes}}$ et $v = c^{\text{tes}}$ sont des courbes conjuguées. Nous pouvons nous proposer le problème suivant.

Déterminer les surfaces dont les coordonnées satisfont à (4) et qui passent par deux courbes données dans l'espace x_1, x_2, x_3.

Nous verrons que, si ces deux courbes données sont au moins une des courbes conjuguées u ou v sur les surfaces, il n'existe qu'une seule solution (une seule surface). Dans tous les autres cas il existe une infinité de surfaces, qui passent par la paire de courbes données.

Cette infinité de solutions présente un caractère spécial. Ce sont des *surfaces plissantes*. Les plis constituent une sorte de *singularité essentielle* pour ces surfaces qui peuvent pourtant avoir un plan tangent déterminé en chaque point.

5. On peut se proposer un problème analogue. Soient deux transformations infinitésimales

$$
(15) \qquad A(z) = a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial x_n}, \quad B(z) = b_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial x_n}
$$

qui représentent deux congruences de courbes définies par les éléments tangentiels

$$(15') \qquad dx_i = a_i dx_n \text{ et } \delta x_i = b_i \delta x_n.$$

1) Quelle est la condition pour que ces deux congruences de courbes admettent une variété de surfaces intégrales communes sur lesquelles ces congruences tracent des courbes *conjuguées?* 2) Trouver ensuite quelles sont les surfaces intégrales qui passent par deux courbes données.

Pour répondre à la première question remarquons que, en tenant compte de (15′) et (4) on aura (en désignant les dérivées par des accents).

$$(16) \qquad \begin{aligned} x''_{i,uv} &= a'_{i,v}\, x'_{n,u} + a_i\, x''_{n,uv} = (a'_{i,v} + \lambda a_i)\, x'_{n,u} + a_i \mu\, x'_{n,v} \\ x''_{i,vu} &= b'_{i,u}\, x'_{n,v} + b_i\, x''_{n,uv} = \lambda b_i\, x'_{n,u} + (b'_{i,u} + \mu b_i)\, x'_{n,v}. \end{aligned}$$

On en tire

$$(17) \qquad \lambda = \frac{-a'_{i,v}}{a_i - b_i}, \quad \mu = \frac{b'_{i,u}}{a_i - b_i}$$

et puisque

$$a'_{i,v} = a'_{i,x_k}\, x'_{k,v} = (a'_{i,x_k}\, b_k + a'_{i,x_n})\, x'_{n,v} = B(a_i)\, x'_{n,v}$$

$$b'_{i,u} = b'_{i,x_k}\, x'_{k,u} = (b'_{i,x_k}\, a_k + b'_{i,x_n})\, x'_{n,u} = A(b_i)\, x'_{n,u}$$

on peut écrire la condition demandée ainsi

$$(17') \qquad B(a_i) = \frac{-\lambda}{x'_{n,v}}\,(a_i - b_i), \quad A(b_i) = \frac{\mu}{x'_{n,u}}\,(a_i - b_i).$$

Remarquons que les transformations (15) forment un système complet (c'est-à-dire les deux congruences de caractéristiques (15′) ont une famille de surfaces intégrales communes). Les relations (17′) expriment plus, à savoir que (4) est satisfait, et donnent λ et μ.

6. Répondons à la seconde question. Soient $x_i(u, v)$ les coordonnées de la surface qui satisfont à (4), surface qui admet donc les u et v constantes comme courbes conjuguées. On sait d'après Cauchy qu'il n'existe qu'une seule intégrale de (4) qui prenne pour $u = u_0$ une fonction donnée $x(v)$ et pour $v = v_0$ une fonction donnée $\bar{x}(u)$. Donc il n'existe qu'une seule surface

qui admette ces deux courbes $u=u_{0i}$, $x_i=x_i(v)$ et $v=v_{0i}$, $x_i=\bar{x}_i(u)$ comme courbes conjuguées.

D'après Picard il n'existe qu'une seule intégrale (continue ou non) qui pour $u=u_0$ et $u=v$ prenne des valeurs données, et aussi une seule et unique surface dont les coordonnées prennent des valeurs données aux points où les intersections des projections des deux courbes données (que la surface doit contenir) se coupent sur le plan u, v, même lorsque aucune de ces deux courbes ne passe par $u=c^{te}$ ou $v=c^{te}$. D'après Goursat aussi.

Nous avons démontré depuis 1914 et 1915 que dans ce dernier cas (qui correspond au problème que nous posons aujourd'hui) l'équation (4) admet une infinité de solutions, donc, en ce qui nous regarde aujourd'hui, une infinité de surfaces qui passent par deux courbes données [dont aucune n'est caractèristique de (4)].

7. Mais ces surfaces, sauf peut-être une, auront un caractère particulier. Elles peuvent être continues, même ayant un plan tangent déterminé en chaque point, sans que les fonctions qui expriment leurs coordonnées soient nécessairement des fonctions continues. Elles sont en général des *surfaces plissantes*, dans une région qui joue un rôle analogue à celui des *singularités essentielles*. Ainsi soient par exemple $\lambda=\mu=0$. On aura des équations aux intégrales réciproques $A(b_i)=0$, $B(a_i)=0$. Prenons le cas $x=u$, $y=v$, $z=z(u,v)$ donc $z''_{uv}=0$, $z=X(x)+Y(y)$. Voyons s'il n'existe qu'une seule surface passant par deux courbes données: $z=f(x)$ pour $y=x$ et $z=\varphi(x)$ pour $y=\lambda x$. On devra avoir

$$Y(\lambda x)-Y(x)=q(x),\quad q=\varphi-f. \tag{18}$$

Y n'admet d'après Goursat qu'une solution

$$Y(x)=-\sum_{n=0}^{\infty} q(\lambda^n x) \tag{19}$$

qui peut ne pas même exister, si cette série est divergente. Nous verrons que (18) admet une infinité de solutions, que (19) soit convergent ou non. Picard croyait que, plus généralement

$$Y(x)-P(x)\,Y(\lambda x)=q(x) \tag{20}$$

n'admet qu'une seule solution, qui se réduise à une valeur donnée a et qu'elle sera convergente si

$$P(0) = 1, \quad \Pi^k = P(x)\, P(\lambda x) \dots P(\lambda^k x)$$

est convergent pour $k = +\infty$ et si $\sum_{k=0}^{\infty} \Pi^k q(\lambda^k x)$ converge aussi, et si $q(0) = 0$. Pourtant il existe une infinité de solutions, telles que [3])

$$(19') \qquad Y(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} q(\lambda^n x) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(\lambda^n x) + \frac{q(0)}{L\lambda} Lx + a$$

avec $u(x)$ fonction arbitraire, qui peut être choisie pour la convergence si (19) est divergent. (19') sera discontinu pour $x = 0$ (mais d'un seul tenant si l'on veut), pourtant elle y pourra prendre une valeur donnée a si $q(0) = 0$. On prendra par exemple

$$(20) \qquad u(x) = \frac{x^p}{1 + x^{2p}}.$$

La surface intégrale est plissante pour $x \to 0$, mais peut y avoir en chaque point un plan tangent déterminé si $q(0) = 0$. Les fonctions qui expriment les coordonnées d'une surface peuvent être et même doivent être discontinues si on exige que la surface passe par deux courbes qui ne se coupent pas (aux points où les ombres de ces deux courbes se coupent les discontinuités se relèvent); ceci n'empêche pas nécessairement que la surface y soit continue et même admette en chaque point un plan tangent déterminé.

8. Pour le cas général, le problème se ramène au suivant. Trouver trois intégrales $x_i(u, v)$ de (4) qui prennent respectivement pour $v = p(u)$ les valeurs $X_i(u)$ et pour $v = q(u)$ les valeurs $\overline{X}_i(u)$. Nous emploierons pour l'intégrale générale de (4) la forme de M. Le Roux:

$$(21) \qquad x(u, v) = \int_0^u F(\alpha)\, \varrho(u, v; \alpha)\, d\alpha + \int_0^v \Phi(\alpha)\, \sigma(u, v; \alpha)\, d\alpha$$

---

[3]) Voir E. Picard, C. R. Ac. Sc. Paris 1907, mai 13 *„Sur une équation fonctionnelle"* et sous même titre C. Popovici C. R. Ac. Sc. Paris 1914, t. 158, p. 1867—69.

où F et Φ sont deux fonctions arbitraires de l'intégration, α un paramètre arbitraire, ϱ et σ deux intégrales particulières satisfaisant aux relations

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial\varrho}{\partial v}+\lambda(u,v)\,\varrho=0 \text{ pour } \alpha=u \text{ et} \\ &\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\mu(u,v)\,\sigma=0 \text{ pour } \alpha=v. \end{aligned}$$

Les conditions à la limite seront exprimées par

$$(23)\qquad \begin{aligned} X_i(u) &= \int_0^u F_i(\alpha)\, r(u,\alpha)\, d\alpha + \int_0^{p(u)} \Phi_i(\alpha)\, s(u,\alpha)\, d\alpha \\ \overline{X}_i(u) &= \int_0^u F_i(\alpha)\, r_1(u,\alpha)\, d\alpha + \int_0^{q(u)} \Phi_i(\alpha)\, s_1(u,\alpha)\, d\alpha \end{aligned}$$

où $r(u,\alpha)=\varrho(u,p(u);\alpha)$, $s(u,\alpha)=\sigma(u,p(u);\alpha)$; $r_1(u,\alpha)=\varrho(u,q(u);\alpha)$, $s_1(u,\alpha)=\sigma(u,q(u);\alpha)$. On aura pour les inconnues F et Φ les séries $F=\Sigma f_n$, $\Phi=\Sigma\varphi_n$ avec les relations de récurrence

$$(24)\qquad \begin{aligned} &f_n(u)\,R(u)+\varphi_n(p(u))\,S(u)= \\ &=-\int_0^u \frac{df_{n-1}(\alpha)}{d\alpha}\,\overline{r}(u,\alpha)\,d\alpha-\int_0^{p(u)}\frac{d\varphi_{n-1}(\alpha)}{d\alpha}\,\overline{s}(u,\alpha)\,d\alpha \\ &f_n(u)\,R_1(u)+\varphi_n(q(u))\,S_1(u)= \\ &=-\int_0^u \frac{df_{n-1}(\alpha)}{d\alpha}\,\overline{r}_1(u,\alpha)\,d\alpha-\int_0^{q(u)}\frac{d\varphi_{n-1}(\alpha)}{d\alpha}\,\overline{s}_1(u,\alpha)\,d\alpha \end{aligned}$$

où $R(u)=r(u,u)$, $S(u)=s(u,u)$; $\overline{r}(u,\alpha)=r(u,\alpha)-r(u,u)$, $\overline{s}(u,\alpha)=s(u,\alpha)-s(u,u)$ et pour avoir $R_1, S_1, \overline{r}_1, \overline{s}_1$ on remplace plus haut p par q.

En éliminant $f_n(u)$ nous obtenons pour chaque n une équation fonctionnelle en φ_n, dont nous avons donné différents moyens de résolution[4]). Il serait intéressant d'étudier dans quelles

---

[4]) Voir Ann. Soc. Pol. Math. loc. cit.

circonstances on a des solutions continues, ou au moins à variation totale finie.

En resumé nous avons trouvé quelles sont les surfaces qui, ayant pour conjuguées les courbes caractéristiques de l'équation (4) $x''_{uv} = \lambda x'_u + \mu x'_v$, passent par deux courbes données et nous avons précisé que, lorsqu'aucune de ces deux courbes n'est pas une caractéristique de cette équation, il existe une infinité de surfaces (plissantes, sauf une). Si une des courbes données est u, ou v constantes, il existe une seule surface.

9. Il est naturel de nous poser maintenant certains problèmes spécifiques à la théorie des conjugués envisagés. Ainsi

1) *Quelles sont les autres courbes conjuguées sur les surfaces solutions de notre problème?* 2) *A quelle condition une surface doit-elle contenir un couple de courbes données (couple de u, v) et les admettre comme courbes conjuguées?*

On doit chercher quelles sont les fonctions $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, telles que les solutions x_i de (4) admettent comme courbes conjuguées $\alpha = c^{te}$ et $\beta = c^{te}$. Mettons la condition que $x''_{\alpha\beta} = l x'_\alpha + m x'_\beta$.

On trouve après une série de réductions

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} x''_{1,u^2} & x'_{1,u} & x'_{1,v} \\ x''_{2,u^2} & x'_{2,u} & x'_{2,v} \\ x''_{3,u^2} & x'_{3,u} & x'_{3,v} \end{vmatrix} u'_\alpha u'_\beta + \begin{vmatrix} x''_{1,v^2} & x'_{1,u} & x'_{1,v} \\ x''_{2,v^2} & x'_{2,u} & x'_{2,v} \\ x''_{3,v^2} & x'_{3,u} & x'_{3,v} \end{vmatrix} v'_\alpha v'_\beta = 0.$$

Les fonctions x_1, x_2, x_3 et une fonction u ou v étant données, on trouve l'autre. On peut également se donner une relation entre u et v, par exemple celle qui exprime que α et β sont lignes de courbure, ou lignes asymptotiques.

On voit aussi, que si l'on se donne successivement trois expressions du rapport $\varrho = u'_\alpha u'_\beta / v'_\alpha v'_\beta$ on aura trois équations du second ordre aux inconnues x_1, x_2, x_3 qui nous montrent l'ensemble des solutions (surfaces) qui admettent des lignes conjuguées satisfaisant à ces trois valeurs de ϱ. L'ensemble des surfaces (solutions x_1, x_2, x_3) dépendra de trois paires de fonctions arbitraires à une variable, les F_i et Φ_i, $i = 1, 2, 3$, de (23).

10. Lorsque les congruences sont définies par les équations (3), alors il faut chercher les transformations qui trans-

forment deux familles de courbes conjuguées en deux autres familles aussi conjuguées. Nous avons démontré dans notre thèse que cela arrive si l'on remplace (2) par

$$(26)\qquad d\bar{x}_i/d\bar{x}_n = p\,a_i + (1-p)\,b_i,\quad \delta\bar{x}_i/\delta\bar{x}_n = r\,a_i + (1-r)\,b_i$$

où $a_n = b_n = 1$, et

$$(27)\qquad \frac{pr}{(1-p)(1-r)} = \Delta,\ \Delta = -\frac{B(b_1)(a_2-b_2) - B(b_2)(a_1-b_1)}{A(a_1)(a_2-b_2) - A(a_2)(a_1-b_1)},$$

lorsque $p = r$, nous aurons deux congruences de lignes asymtotiques.

Regardant (17′), on voit que, si $B(a_i) = 0$, ou si dans (4) $\lambda = 0$, alors on retrouve le théorème de Königs: *Si une famille de cylindres entoure une surface, alors les courbes de contact sont conjuguées avec les courbes qui ont pour tangentes les génératrices des cylindres.* Nous pouvons en plus remarquer que, *lorsque les lignes de contact des cylindres forment une congruence de courbes planes, la relation qui exprime ce fait, exprime aussi, que nos lignes conjuguées sont des lignes de courbure.*

Lorsque $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, nous avons vu que $B(a_i) = 0$ et $A('_i) = 0$ et que $A(a_i) = F_i(a)$ et $B(b_i) = \Phi_i(b)$. *Lorsque seuls les $A(b_i) = 0$, alors nous avons seulement les*

$$B(b_i) = B(b_{n-1})\,\varphi_i(b_1, \ldots, b_{n-1}),\quad i = 1, \ldots, n-2.$$

Nous dirons que nous avons des *sousautogroupes.*

11. Passons maintenant aux équations d'ordre supérieur. Limitons nous à l'équation

$$(28)\qquad x'''_{u,v,w} = 0\,.$$

Il n'existe qu'une seule surface x_1, x_2, x_3, x_4 de u, v, w, continue ou non, qui passe par trois surfaces données situées dans les plans caractéristiques de (28) parce que l'intégrale géuérale de (28).

$$(29)\qquad x = f_1(u,v) + f_2(v,w) + f_3(w,u) + \varphi_1(w) + \varphi_2(u) + \varphi_3(v) + k$$

avec les f, φ et k arbitraires, n'admet qu'une solution, continue ou non, qui passe par trois surfaces:

$$(30)\qquad \begin{aligned} &w = w_0,\ x = F_1(u,v) + \Phi_1(u) + \Psi_1(v) + c_1;\ u = u_0,\ x = F_2(v,w) + \\ &+ \Phi_2(v) + \Psi_2(w) + c_2;\ v = v_0,\ x = F_3(w,u) + \Phi_3(w) + \Psi_3(u) + c_3. \end{aligned}$$

On aura pour les sept inconnues f, φ et k les solutions uniques

$$f_1 = F_1, \; f_2 = F_2, \; f_3 = F_3$$
$$\varphi_1(z) = \Psi_2(z) - F_3(z, u_0) = \Phi_3(z) - F_2(v_0, z)$$
$$\varphi_2(z) = \Psi_3(z) - F_1(z, v_0) = \Phi_1(z) - F_3(w_0, z)$$
$$\varphi_3(z) = \Psi_1(z) - F_2(z, w_0) = \Phi_2(z) - F_1(u_0, z)$$
$$k = c_1 - \varphi_1(w_0) = c_2 - \varphi_2(u_0) = c_3 - \varphi_3(u_0)$$

qui expriment en même temps des relations de compatibilité entre les données (30).

Même si ces relations de compatibilité ne sont pas satisfaites, on aura tout de même des solutions. Elles seront encore uniques, mais discontinues ou nonuniformes. Ceci s'impose si les trois surfaces données ne se coupent pas dans un point. Si au lieu de (30) nous imposons à l'intégrale (29) qu'elle ne soit pas située dans des plans caractéristiques, alors nous aurons pour la différence de deux intégrales des expressions de ce genre

$$x(u, q(u), w) - x(u, u, w) = h_0(u) + \sum_n h_n(u)\, r_n(w),$$

avec q, h_0, h_n donnés. Mettons

$$x = \sum_n \alpha_n(u)\, \beta_n(v) + \gamma_n(v)\, \delta_n(w) + \varepsilon_n(w)\, \varrho_n(u).$$

On devra avoir

$$\sum \alpha_n(u)[\beta_n(q(u)) - \beta_n(u)] = h_0(u), \quad \gamma_n[q(u)] - \gamma_n(u) = h_n(u).$$

On peut prendre les α_n, β_n arbitraires sauf une et ajouter ensuite à chaque solution de γ_n et aux β_n une *périodique* arbitraire en q, c'est-à-dire $p[q(u)] = p(u)$. Les solutions seront en général *plissantes* vers $q(u) = u$. On prendra $\delta_n(w) = r_n(w)$, ensuite ε_n et ϱ_n arbitraires.

12. Nos problèmes peuvent être généralisés pour des équations complètes

$$A x''_{u^2} + 2B x''_{uv} + C x''_{v^2} + D x'_u + E x'_v + F = 0$$

lorsque nous introduisons au lieu de u et v les variables α et β le discriminant de l'équation transformée garde son genre, parce que le nouveau discriminant sera

$$(B^2 - AC)\,(u'_\alpha v'_\beta - u'_\beta v'_\alpha)^2.$$

On aura évidemment des invariances pareilles pour les équations d'ordre supérieur.

SUR UN SYSTÈME SIMPLE D'ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE

Par Maurice Janet (Paris)

Je dédie le présent article à la mémoire très vénérée et très chère du Professeur St. Zaremba.

Ce petit travail a son origine dans le désir de terminer une application particulière faite par M. Elie Cartan de sa théorie de l'équivalence. J'ai été amené à ce propos à faire une étude complète d'un système simple du second ordre et cette étude m'a semblé présenter quelque intérêt en elle-même.

Je donne d'abord les conditions différentielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de x, y pour que la solution du système d'équations aux dérivées partielles à une fonction inconnue z de x, y (dont nous désignerons les dérivées premières par p, q et les dérivées secondes par r, s, t)

$$(1) \qquad r = \alpha p, \quad 2s = \beta p + \gamma q, \quad t = \delta q$$

ait un degré de généralité maximum, autrement dit dépende de trois constantes arbitraires[1]). Je donne ensuite les conditions différentielles auxquelles doivent satisfaire les mêmes fonctions pour que la solution de (1) dépende de deux constantes arbitraires. Le premier système de conditions constitue un système normal de quatre équations aux quatre inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Il se ramène d'ailleurs à deux équations classiques du second ordre, l'équation de Liouville d'une part, l'équation

$$(x + y)^2 s^2 = 4pq$$

d'autre part, intégrables toutes deux explicitement.

---

[1]) Cf. Appell: J. d. Liouville 3ème série t. 8, p. 192.

Le second système, qui est constitué par deux équations entre les quatre fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ est utilisé pour l'application que nous avions en vue, à savoir la formation effective des deux équations aux dérivées partielles auxquelles doit satisfaire une fonction f pour que l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

admette un groupe à un paramètre de la forme

$$x' = X, \quad y' = Y$$

où X est fonction de x et Y fonction de y.

I. Le système (1) est toujours vérifié par une constante arbitraire. En général il n'a pas d'autre solution. Il est d'autre part évident que si deux solutions analytiques correspondent à un même système de valeurs initiales pour $x = x_0$, $y = y_0$ de z, p, q, ces deux solutions coïncident. La solution générale dépend donc au plus de trois constantes arbitraires. Nous aurons à préciser dans quel cas elle dépend de trois constantes et dans quel cas elle dépend de deux constantes seulement.

z étant une fonction arbitraire de x et y, posons:

$$r - \alpha p \equiv A, \quad 2s - (\beta p + \gamma q) \equiv B, \quad t - \delta q \equiv C.$$

On aperçoit aisément les deux identités suivantes:

$$Lp + Mq \equiv 2C_x - B_y + \left(\delta - \frac{\beta}{2}\right)B - \gamma C \equiv I,$$

$$Np + Rq \equiv 2A_y - B_x + \left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right)B - \beta A \equiv J,$$

où on a posé

$$L \equiv \beta\left(\frac{\beta}{2} - \delta\right) + \beta_y, \quad M \equiv \frac{\beta\gamma}{2} + \gamma_y - 2\delta_x,$$

$$N \equiv \frac{\beta\gamma}{2} + \beta_x - 2\alpha_y, \quad R \equiv \gamma\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha\right) + \gamma_x.$$

Considérons maintenant le système (1) autrement dit: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Pour que les trois valeurs initiales de

z, p, q, puissent être prises arbitrairement, on voit qu'il est nécessaire que les quatre fonctions L, M, N, R soient identiquement nulles. Il est aisé de voir que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes. Rappelons la méthode classique[2]) utilisée pour s'en rendre compte. Donnons sur $x = x_0$ la fonction z de y déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \delta \frac{dz}{dy}$$

et les valeurs initiales z_0 et q_0 de z et de $\frac{dz}{dy}$ pour $y = y_0$.

Donnons d'autre part sur $x = x_0$ la fonction p de y déterminée par l'équation différentielle

$$2\frac{dp}{dy} = \beta p + \gamma \frac{dz}{dy}$$

et la valeur initiale p_0 de p pour $y = y_0$.

Ces fonctions z et p utilisées comme fonctions initiales sur $x = x_0$ pour l'équation aux dérivées partielles $r \doteq \alpha p$ déterminent entièrement la fonction z de x et y; A est nul partout.

Les équations

$$B_x = \left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right)B, \quad C_x = \gamma\frac{C}{2} + \frac{1}{2}B_y + \left(\frac{\beta}{2} - \delta\right)B$$

vérifiées partout et telles que, sur $x = x_0$, on ait $B = 0$ et $C = 0$ montrent que l'on a *partout* $B = 0$ et $C = 0$. Le système proposé est donc entièrement vérifié. La solution générale dépend donc de trois constantes arbitraires z_0, p_0, q_0.

II. Supposons maintenant que l'une au moins des quatre expressions L, M, N, R ne soit pas identiquement nulle. Nous supposons[3]) pour fixer les idées $L \neq 0$.

---

[2]) On peut aussi utiliser le théorème de Frobenius sur les systèmes complètement intégrables.

[3]) Remarquons avant tout que si β et α_y sont tous deux nuls sans que M et R le soient tous deux, la solution dépend de deux constantes arbitraires: elle est de la forme $C_1X + C_2$ où X désigne une certaine fonction de x. Remarquons d'autre part (R_1) que si $L = R = 0$ avec $M \neq 0$ et $N \neq 0$, I et J fournissent deux formes linéaires en p, q indépendantes et (R_2) que si $L = R = N = 0$ avec $M\beta \neq 0$, I et $I_x - LA - \frac{M}{2}B$ fournissent encore

De nouvelles combinaisons linéaires des premiers membres des équations données conduisent à de nouvelles expressions linéaires en p, q. En posant

$$2C_x - B_y + \left(\delta - \frac{\beta}{2}\right)B - \gamma C \equiv I$$

on trouve

$$\left(L\alpha + M\frac{\beta}{2} + L_x\right)p + \left(\frac{M\gamma}{2} + M_x\right)q \equiv I_x - LA - \frac{M}{2}B,$$

$$\left(L\frac{\beta}{2} + L_y\right)p + \left(\frac{L\gamma}{2} + M\delta + M_y\right)q \equiv I_y - L\frac{B}{2} - MC.$$

Pour que la solution du système proposé dépende de deux constantes arbitraires, il est évidemment nécessaire que ces nouvelles expressions linéaires en p, q ne soient indépendantes ni l'un ni l'autre de la combinaison $Lp + Mq$.

On est donc amené à écrire les deux conditions suivantes

$$M\left(L\alpha + \frac{M\beta}{2} + L_x\right) - L\left(\frac{M\gamma}{2} + M_x\right) = 0$$

$$M\left(L\frac{\beta}{2} + L_y\right) - L\left(L\frac{\gamma}{2} + M\delta + M_y\right) = 0$$

qui peuvent s'écrire encore

$$(2) \qquad \begin{cases} P = \dfrac{\beta}{2}Z^2 + \left(\alpha - \dfrac{\gamma}{2}\right)Z \\ Q = \left(\dfrac{\beta}{2} - \delta\right)Z - \dfrac{\gamma}{2} \end{cases}$$

---

deux formes linéaires en p, q indépendantes; dans chacun de ces deux cas, le système (1) n'a donc pas d'autre solution qu'une constante arbitraire. Conclusions analogues si γ et δ_x sont tous deux nuls sans que N et L le soient, etc.

En dehors du cas examiné dans le texte, et du cas analogue obtenu en supposant $R \neq 0$, peut-il se faire que la solution de (1) dépende de deux constantes arbitraires? Il faut pour cela que $L = R = 0$ et que (d'après R_1) l'une au moins des expressions M, N soit nulle, supposons $N = 0$; il faut de plus évidemment $M \neq 0$; mais (d'après R_2) il faudra alors $\beta = 0$. Cette égalité rapprochée de $N = 0$ donne $\alpha_y = 0$. Au total les seuls cas que nous pourrions laisser échapper rentrent dans un des types $\beta = \alpha y = 0$ ou $\gamma = \delta_x = 0$. Un calcul aisé montre que pour l'application faite au paragraphe IV il n'y a pas à tenir compte de ces cas d'exception.

en désignant par Z le rapport M/L et par P, Q les deux dérivées partielles de Z par rapport à x, y.

Supposons inversement que l'on ait entre les quatre fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les deux relations indiquées (avec l'inégalité $L \neq 0$); je dis que la solution du système proposé dépend de deux constantes arbitraires.

On pourrait s'en rendre compte par une méthode analogue à celle qui a servi au paragraphe I, en utilisant les identités précedemment écrites, mais nous allons le voir par un autre procédé qui conduira à une véritable intégration du système.

Nous avons à examiner les conséquences[4]) que l'on peut tirer des trois relations en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, Z$ constituées par les deux égalités (2) et l'égalité $LZ - M = 0$.

L'élimination de α et δ entre ces trois équations conduit immédiatement à l'unique relation en β, γ, Z suivante:

$$\left(\frac{\gamma}{Z} - \beta + \frac{2Q}{Z}\right)_x + (\gamma - \beta Z)_y = 0 .$$

On voit donc que l'expression $\gamma - \beta Z$ peut être considérée comme la dérivée partielle par rapport à x d'une fonction W de x, y dont $-\frac{\gamma - \beta Z}{Z} - 2\frac{Q}{Z}$ sera la dérivée par rapport à y.

Posons maintenant $V = W + 2 \log Z$.

La relation entre W et Z: $W_x + Z W_y + 2 Z_y = 0$ conduit à la relation entre W et V

$$e^{\frac{V}{2}} V_y + e^{\frac{W}{2}} W_x = 0 .$$

$-e^{\frac{V}{2}}$ et $e^{\frac{W}{2}}$ peuvent être considérées commes les dérivées partielles par rapport à x et y d'une même fonction U; d'où finalement les formules suivantes:

$$Z = -\frac{U_x}{U_y}, \quad \gamma - \beta Z = 2\frac{U_{xy}}{U_y}$$

et les valeurs correspondantes de α, δ

$$\alpha = \frac{U_{x^2}}{U_x}, \quad \delta = \frac{U_{y^2}}{U_y} .$$

---

[4]) Une de ces conséquences, qui résulte implicitement du calcul ci-dessous, est l'égalité $NZ - R = 0$; il est aisé aussi de l'obtenir directement.

Considérons donc un système de la forme (1) où α, γ, δ sont donnés en fonction de deux fonctions arbitraires β et U par les formules suivantes

$$\alpha = \frac{U_{x^2}}{U_x}, \quad \gamma = \frac{2\, U_{xy} - \beta\, U_x}{U_y}, \quad \delta = \frac{U_{y^2}}{U_y}.$$

Il est bien évident maintenant que ce système admet une solution non constante, à savoir U de x, y. Il admet dès lors pour solution toutes les fonctions $C_1 U + C_2$ où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.

On voit que l'on a été amené chemin faisant à remarquer l'identité suivante valable pour toute fonction z de x, y

$$\left(\log \frac{p}{q}\right)_{xy} = \left(\frac{s}{p}\right)_x - \left(\frac{s}{q}\right)_y$$

qui résoud explicitement de la manière la plus générale l'équation à deux inconnues $\left(\log \dfrac{P}{Q}\right)_{xy} = Q_x - P_y$.

III. Les conditions trouvées au paragraphe I pour que la solution dépende de trois constantes arbitraires constituent un système *normal* de quatre équations à quatre fonctions inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ces quatre fonctions dépendront donc alors de quatre fonctions arbitraires d'une variable. Mais il y a plus, et nous allons en ramener l'intégration à celle de deux équations bien connues du second ordre.

L'élimination de α, δ conduit immédiatement aux deux relations suivantes en β, γ [5]).

$$\left(\frac{R}{\gamma}\right)_y - \frac{N}{2} + \left(\frac{L}{\beta}\right)_x - \frac{M}{2} \equiv (\log \beta\gamma)_{xy} - \frac{\beta\gamma}{2} = 0$$

$$\left(\frac{R}{\gamma}\right)_y - \frac{N}{2} - \left(\frac{L}{\beta}\right)_x + \frac{M}{2} \equiv \left(\log \frac{\beta}{\gamma}\right)_{xy} + \beta_y - \gamma_x = 0.$$

La première est une équation du second ordre en $\beta\,\gamma$ qui n'est autre que l'équation, bien connue, de LIOUVILLE. Quant à la seconde elle n'est pas distincte en réalité d'une équation

---

[5]) Nous nous bornons ici, pour abréger, au cas où β et γ sont supposés différents de zéro.

résolue plus haut. En employant un procédé analogue, on est amené à écrire $\beta = U_{xy}/U_x$; $\gamma = U_{xy}/U_y$. En portant ces valeurs de β, γ dans l'expression générale de la solution de l'équation de Liouville

$$\frac{4X'Y'}{(X+Y)^2}$$

où X est fonction de x et Y fonction de y, et où X', Y' représentent leurs dérivées, on est amené pour la fonction U à l'équation suivante, qui est, elle aussi, classique

$$U_{xy}^2 = \frac{4X'Y'}{(X+Y)^2} U_x U_y .$$

L'intégration de cette équation (cf. Goursat „Équations aux dérivées partielles du second ordre", tome II, p. 186) conduit aux valeurs suivantes de $\beta, \gamma, \alpha, \delta$:

$$\beta = \frac{2Y'v}{(X+Y)u}, \quad \alpha = \left(\log \frac{uX'}{X+Y}\right)_x,$$

$$\gamma = \frac{2X'u}{(X+Y)v}, \quad \delta = \left(\log \frac{vY'}{X+Y}\right)_y$$

avec

$$u = \frac{\xi'}{X'} + \frac{\eta - \xi}{X+Y}, \quad v = \frac{\eta'}{Y'} + \frac{\xi - \eta}{X+Y}$$

ξ étant une fonction de x et η fonction de y et ξ', η' représentant leurs dérivées.

Le système proposé (1) conduit donc aux relations

$$p = \frac{X'u}{X+Y} Y_1, \quad q = \frac{Y'v}{X+Y} X_1, \quad s = \frac{X'Y'}{(X+Y)^2}(uX_1 + vY_1)$$

où X_1, Y_1 désignent respectivement une fonction de x seul et une fonction de y seul.

En comparant la valeur de s tirée de la première équation par dérivation relativement à y et la valeur de s que l'on vient d'écrire, on est ramené à la relation

$$Y_1'(X+Y) - Y'(X_1 + Y_1) = 0 .$$

On tire immédiatement de là: $X_1 = aX + b$, $Y_1 = aY - b$, où a et b sont constantes.

La solution du système proposé est donc trouvée à l'aide de quadratures avec *trois* constantes arbitraires.

En définitive, en prenant, pour simplifier, $X \equiv x$, $Y \equiv y$, le système (1) défini par les fonctions $\xi(x)$, $\eta(y)$ et les égalités

$$u = \frac{d\xi}{dx} + \frac{\eta - \xi}{x + y}, \quad v = \frac{d\eta}{dy} + \frac{\xi - \eta}{x + y}$$

$$\alpha = \frac{u_x}{u} - \frac{1}{x+y}, \quad \beta = \frac{2v}{(x+y)u}, \quad \gamma = \frac{2u}{(x+y)v}, \quad \delta = \frac{v_y}{v} - \frac{1}{x+y}$$

admet pour l'intégrale générale

$$c + b\,\frac{\eta - \xi}{x + y} + a \int \frac{u\,y\,dx + v\,x\,dy}{x + y}.$$

IV. M. Elie Cartan a traité [6]) à titre d'application particulière de sa théorie, le problème de l'équivalence de deux équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

vis à vis du groupe de transformations

$$x' = X, \quad y' = Y,$$

où X, Y désignent deux fonctions arbitraires, la première de x, la seconde de y. Posons [7]) avec M. Cartan

$$\omega_1 = m f\,dx, \quad \omega_2 = m\,dy.$$

La différentielle d'une fonction arbitraire s'écrira

$$d = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2$$

où

$$X_1 = \frac{1}{mf}\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y}.$$

---

[6]) Ann. Scient. Éc. Normale Sup-ère t. 25 (1908), p. 78 et suiv.

[7]) Je modifie légèrement les notations de M. Cartan; en particulier je désigne ici par m une fonction quelconque de x, y, la notation u étant réservée pour la suite dans un autre sens.

Les différentielles symboliques de ω_1, ω_2 s'écrivent

$$\begin{aligned} d\,\omega_1 &= A\,\omega_1\,\omega_2 \\ d\,\omega_2 &= B\,\omega_1\,\omega_2 \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} A &= -\frac{(m\,f)_y}{m^2 f} \\ B &= \frac{m_x}{m^2 f} \end{aligned}$$

ou encore en introduisant la nouvelle forme différentielle

$$d\,\omega_1 = \omega_1\,\overline{\omega}, \quad \overline{\omega} = -\,B\,\omega_1 + A\,\omega_2$$

$$d\,\omega_2 = \omega_2\,\overline{\omega}, \quad d\,\overline{\omega} = (X_1 A + X_2 B)\,\omega_1\,\omega_2$$

$$X_1 A + X_2 B = -\frac{1}{m^2 f}\,\frac{\partial^2 \log f}{\partial x\,\partial y}.$$

Le cas où le produit d'une fonction de x par une fonction de y conduit aux équations admettant un groupe à trois paramètres; équations réductibles à la forme $\dfrac{dy}{dx} = 1$; groupe défini par les formules

$$x' = a_1 x + a_2, \quad y' = a_1 y + a_3.$$

Dans le cas où $(\log f)_{xy} \neq 0$, le fait que A et B ne peuvent être toutes deux constantes, montre que le groupe admis par l'équation est à 1 paramètre au plus. On est amené à se demander si $X_1 A$ et $X_2 A$ peuvent être à la fois fonctions de A. Si d'ailleurs il en est ainsi, on voit que pour toute fonction I de A, $X_1 I$ et $X_2 I$ sont aussi fonctions de A et de plus

$$\frac{X_1 I}{X_2 I} = \frac{X_1 A}{X_2 A}.$$

En particulier c'est vrai pour le rapport

$$J = \frac{X_1 A}{X_2 A}$$

que nous appellerons u. On a donc

$$u = \frac{X_1 u}{X_2 u}.$$

En appliquant l'identité fondamentale à l'égalité

$$du = \omega_1 X_1(u) + \omega_2 X_2(u)$$

on trouve

$$A X_1(u) + B X_2(u) = [X_2(u)]^2$$

qui permet de voir que B sera lui-même fonction de u dès que $X_1 u$, $X_2 u$, A le seront. Or les égalités

$$\frac{X_1(u)}{X_2(u)} = u, \quad X_2(u) = G(u)$$

permettant d'avoir f et m en fonction de u d'où l'expression de A

$$A = \frac{dG}{du} - \frac{u(\log u)_{xy}}{u_x u_y} G(u).$$

On voit que pour que A soit fonction de u il est nécessaire que $\frac{u_{xy}}{u_x u_y}$ soit fonction de u ou, ce qui revient au même, que l'on ait l'équation aux dérivées partielles suivante, du troisième ordre en u,

$$\left(\log \frac{u_x}{u_y}\right)_{xy} = 0$$

l'équation qui s'intègre explicitement [8]) à l'aide de trois fonctions arbitraires U, a, b d'une variable: $u = U(a+b)$, a étant fonction de x, et b fonction de y.

La fonction f est donc donnée par la formule générale:

$$f = \frac{a'}{b' U(a+b)}$$

et l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ est réductible à la

---

[8]) Cette intégration prouve que cette équation aux dérivées partielles doit garder la même forme quelle que soit celle des variables u, x, y que l'on considère comme fonctions des deux autres.

forme $\dfrac{dx}{dy} = U(x+y)$ qui admet le groupe à un paramètre

$$x' = x + a, \quad y' = y - a.$$

A quelles conditions différentielles satisfont toutes les fonctions f trouvées?

On voit immédiatement que $\log f$, que nous appellerons F, satisfait à l'équation

$$XF_x - YF_y + X' + Y' = 0$$

où $X = \dfrac{1}{a'}$, $Y = \dfrac{1}{b'}$ représentent des fonctions respectivement de x seul et de y seul. Inversement, toute fonction F satisfaisant à une équation de cette forme peut être considérée comme le *log* d'une fonction de la forme $\dfrac{a'}{b'\,U(a+b)}$.

Cette relation montre que YF_{xy}, XF_{xy} peuvent être considérées comme les dérivées partielles par rapport à x, y d'une même fonction H de x, y. Inversement s'il existe une fonction H non constante satisfaisant au système

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H_x}{F_{xy}}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H_y}{F_{xy}}\right) = 0, \quad \frac{H_y}{F_{xy}} F_x - \frac{H_x}{F_{xy}} F_y + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H_y}{F_{xy}}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H_x}{F_{xy}}\right) = 0 \quad (\text{où } F_{xy} \neq 0),$$

on pourra affirmer que F est de la forme voulue. Le système en H que nous sommes amenés à écrire est précisément un des systèmes étudiés dans ce qui précède. Il suffira d'exprimer les deux conditions différentielles précisées au paragraphe II, en prenant

$$\alpha = \frac{F_{x^2y}}{F_{xy}}, \quad \beta = \frac{F_{xy^2}}{F_{xy}} + F_y, \quad \gamma = \frac{F_{x^2y}}{F_{xy}} - F_x, \quad \delta = \frac{F_{xy^2}}{F_{xy}}$$

on aura là le système cherché de deux équations aux dérivées partielles en F.

On constate que, dans ce qui précède, nous n'avons pas utilisé la valeur particulière de m choisie par M. ELIE CARTAN, valeur destinée à rendre égale à l'unité le coefficient de $\omega_1 \omega_2$ dans la différentielle symbolique $d\overline{\omega}$.

En utilisant cette valeur particulière de m, on trouve d'ailleurs:

$$A = -\frac{1}{2}\left(F_y + \frac{F_{xy^2}}{F_{xy}}\right)\cdot\left(-e^{-F}F_{xy}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$B = \frac{1}{2}\left(-F_x + \frac{F_{x^2y}}{F_{xy}}\right)\cdot\left(-e^{F}F_{xy}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

SULLA TORSIONE DI UN PRISMA ELASTICO CAVO SECONDO LA TEORIA DI SAINT VENANT *)

Nota di MAURO PICONE (Roma)

Se A indica un insieme di punti del piano (x, y), riferito ad una coppia di assi cartesiani fra loro ortogonali x e y, designerò con FA la frontiera e con CA l'insieme complementare di A rispetto al detto piano. Assunte le quantità positive p_0, p e q_0, q, essendo $p_0 < p$ e $q_0 < q$ designerò con $R_{p_0 q_0}$ e R_{pq} gl'intorni rettangolari dell'origine di semilati p_0, q_0 e p, q, definiti, rispettivamente, dalle limitazioni:

$$|x| < p_0, \; |y| < q_0 \quad \text{e} \quad |x| < p, \; |y| < q,$$

con $R_{p_0 q_0}^{pq} = R$ la corona rettangolare aperta $R_{pq} - (R_{p_0 q_0} + \mathrm{F}R_{p_0 q_0})$, definita dalle limitazioni

$$p_0 < |x| < p, \quad q_0 < |y| < q,$$

con H l'insieme dei punti di FR per cui

$$|x| = p, \; |y| < q \quad \text{oppure} \quad |x| = p_0, \; |y| < q_0,$$

con K quello per cui

$$|y| = q, \; |x| < p \quad \text{oppure} \quad |y| = q_0, \; |x| < p_0,$$

con V la parte rimanente di FR, costituita dagli otto vertici di $R_{p_0 q_0}$ e di R_{pq}.

Dirò poi *coordinato* un segmento di retta se tale retta è coordinata.

---

*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

Gli sforzi a cui è sottoposto, in una torsione pura, un corpo elastico isotropo e omogeneo che, nel suo stato naturale, abbia la forma di un prisma retto avente le basi parallele al piano (x, y) e per sezione la corona rettangolare chiusa $R+\mathrm{F}R$ si calcolano, a norma della teoria di Saint Venant, risolvendo un particolare classico problema di Dini-Neumann, al quale, volendo considerare le cose con l'indispensabile rigore analitico, darò il seguente insolito enunciato:

Detta $\{\varphi\}$ la classe delle funzioni (reali) $\varphi(x,y)$, dotate nella corona rettangolare R delle derivate parziali φ_x e φ_y, la prima continua in $R+H$ e la seconda in $R+K$, entrambe uniformemente sommabili sui segmenti coordinati contenuti in R [1]*, costruire una funzione φ di tal classe, armonica in R, e verificante le condizioni al contorno*:

(1) $$\varphi_x = y, \text{ su } H; \quad \varphi_y = -x, \text{ su } K.$$

Istituire un pratico procedimento di calcolo, valevole in R, per le derivate φ_x e φ_y, a mezzo delle quali si esprimono appunto i richiesti sforzi.

Chiamerò tale problema il *problema della torsione per il prisma cavo* e ciascuna delle ricercate funzioni una *funzione torsionale.*

Ricevuto dagli amici matematici della sapiente Cracovia l'invito, che mi ha altamente onorato, di contribuire con un mio scritto a questo volume degli Annali della Società matematica polacca, dedicato alla memoria di STANISLAO ZAREMBA, ho pensato, accettando l'invito, che io non avrei potuto fare di meglio che proporre l'accoglimento della presente nota in cui espongo talune considerazioni sul detto problema [2], nella speranza che i discepoli del grande Analista, al quale tanti sostanziali classici progressi deve la teoria delle funzioni armoniche, s'interessino a quel problema e vogliano apportare alla sua risoluzione quei complementi di cui tuttora necessita [3].

---

[1]) Al n. 1 trovasi precisato il significato di tale uniforme sommabilità.

[2]) Non ancora publicate, ma comunicate ai miei collaboratori dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

[3]) Il problema, proposto all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, si presenta nello studio di molte strutture e, particolarmente, in quello di organi essenziali dei velivoli.

1. *La totalità delle soluzioni del problema della torsione del prisma cavo.* Dicendo che la funzione $g(x, y)$, continua in R, è *uniformemente sommabile sui segmenti coordinati* contenuti in R, intendo significare che ad ogni numero positivo ε ne corrisponde un altro $\delta(\varepsilon)$ tale che, comunque si assuma un segmento coordinato I, contenuto in R, di lunghezza inferiore a $\delta(\varepsilon)$, si abbia, detta s l'ascissa sulla retta a cui appartiene I,

$$\int_I |g(x, y)| ds < \varepsilon. \tag{2}$$

Osserviamo, per esempio, che una funzione continua in R, sarà ivi uniformemente sommabile sui segmenti coordinati se esiste su FR un insieme L costituito da un numero finito di punti P_k, tale che, designata, per ogni punto P di R, con $\varrho(P)$ la distanza del punto P da L, si abbia, sempre in R,

$$|g(P)| < \frac{M}{[\varrho(P)]^\alpha},$$

M e α essendo due costanti non negative, la seconda minore di uno. Costruiamo, invero, per ogni punto P_k, l'intorno quadrato Q_k di semilato l, con l tale che due qualsivogliano $Q_h + \mathrm{F}Q_h$ e $Q_k + \mathrm{F}Q_k$ non abbiano punti comuni e diciamo λ la più piccola fra le distanze che ogni FQ_h ha da ogni altra FQ_k, è subito verificato che per ogni segmento coordinato I, contenuto in R, sussiste la (2), se la sua lunghezza è inferiore ad un numero $\delta(\varepsilon)$, per il quale si abbia, simultaneamente,

$$\delta \leqslant \lambda, \quad 3M \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{M}{l^\alpha}\, \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Osserviamo pure che se una funzione $f(P)$ è dotata in R di derivate parziali f_x e f_y ivi continue e uniformemente sommabili sui segmenti coordinati, essa è continua in $R + \mathrm{F}R$, nel senso che, comunque vi si fissi un punto P_0, riesce determinato e finito il limite

$$\lim_{P \to P_0} f(P) \text{ (su } R).$$

Ed invero, assunto ad arbitrio il numero positivo ε, comunque si considerino due punti P' e P'' di R, contenuti nell'intorno quadrato Q del punto P_0 di lato $\delta(\varepsilon/2)$, detto P^* un punto di Q per cui i segmenti $I(P',P^*)$ e $I(P'',P^*)$ siano entrambi coordinati, si ha

$$|f(P')-f(P'')| \leqslant |f(P')-f(P^*)| + |f(P^*)-f(P'')|,$$

e supposto, per esempio, che $I(P',P^*)$ sia parallelo all'asse x e $I(P'',P^*)$ all'asse y, risulta

$$|f(P')-f(P^*)| \leqslant \int_{I(P',P^*)} |f_x|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(P^*)-f(P'')| \leqslant \int_{I(P'',P^*)} |f_y|\,dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ciò posto, andiamo a dimostrare il teorema:

I. *Se il problema della torsione per il prisma cavo ha soluzioni, ne ha una ed una sola, dispari rispetto a x e a y (cioè, come semplicemente diremo,* d i s p a r i*) ed ogni altra si ottiene da quella aggiungendole una costante arbitraria.*

Dimostrazione. Siano φ' e φ'' due soluzioni del problema, a_0, a, b_0, b quantità arbitrarie tali che sia $p_0 < a_0 < a < p$, $q_0 < b_0 < b < q$, T la corona rettangolare chiusa $R^{ab}_{a_0 b_0} + \mathrm{F}R^{ab}_{a_0 b_0}$, n la normale a $\mathrm{F}T$ volta verso l'esterno di T. Posto $\varphi' - \varphi'' = u$ si ha

$$(3) \qquad \int_T (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy = \int_{\mathrm{F}T} u\,\frac{du}{dn}\,ds,$$

onde segue che esiste, determinato, il limite

$$\lim_{T \to R} \int_{\mathrm{F}T} u\,\frac{du}{dn}\,ds,$$

intendendo che T tenda ad R dilatandosi sempre. Dico che tale limite è zero. Ed invero, u, appartenendo alla classe $\{\varphi\}$, riesce continua in $R + \mathrm{F}R$ e vi ha perciò un massimo M del suo modulo. Assunto ad arbitrio il numero positivo ε, sia l un numero minore di $\delta(\varepsilon/16M)$ e delle quantità $p_0, q_0, p-p_0, q-q_0$ e per ogni punto di V consideriamo il suo intorno quadrato di lato l, imponendo alla corona T di mantenere i suoi otto vertici $(a, b), (-a, b), \ldots, (a_0, -b_0)$, nei detti intorni, rispettiva-

mente, dei vertici (p,q), $(-p,q)$,..., $(p_0,-q_0)$ di R. Denoteremo con $\Gamma_\varepsilon(T)$ la parte di FT contenuta negli intorni stessi e con $C_\varepsilon(T)$ la rimanente. Si ha

$$\left|\int\limits_{FT} u\frac{du}{dn}ds\right| \leqslant M\int\limits_{C_\varepsilon(T)}\left|\frac{du}{dn}\right|ds + M\int\limits_{\Gamma_\varepsilon(T)}\left|\frac{du}{dn}\right|ds \leqslant M\int\limits_{C_\varepsilon(T)}\left|\frac{du}{dn}\right|ds+\varepsilon,$$

ed uniformemente al variare del punto (x,y) in $C_\varepsilon(T)$, $\lim\left(\frac{du}{dn}\right)$ (per $T\to R)=0$, ciò che dimostra quanto avevamo asserito. Si ricava dunque dalla (3), $u_x\equiv u_y\equiv 0$ in R, cioè la costanza di u. Se φ è una funzione torsionale, posto

$$u(x,y)=\varphi(x,y)+\varphi(x,-y),\quad v(x,y)=\varphi(x,y)+\varphi(-x,y),$$

si ha l'armonicità di u e v in R e la loro appartenenza alla classe $\{\varphi\}$, nonchè $u_x=v_x=0$ su H, $u_y=v_y=0$ su K, donde, per quanto precede, dette α e β due costanti:

(4) $$\varphi(x,y)+\varphi(x,-y)=\alpha,\ \text{in } R,$$

(5) $$\varphi(x,y)+\varphi(-x,y)=\beta,\ \text{in } R.$$

Sia $\varphi(x,y)$ quella ben determinata funzione torsionale che verifica, per un fissato valore a dell'intervallo (p_0,p) la condizione $\varphi(a,0)=0$. Si trae, dalla (4), per $x=a$, $y=0$ che $\alpha=0$, donde la disparità di φ rispetto a y e l'identità $\varphi(x,0)\equiv 0$, per $p_0\leqslant|x|\leqslant p$. Ne segue dalla (5), per $y=0$, $\beta=0$ e pertanto la disparità di φ anche rispetto a x.

Dimostrato così il teor. I, prenderemo, da ora in poi, esclusivamente in considerazione la funzione torsionale dispari, che indicheremo con φ. Per la sua costruzione considereremo due diversi metodi che riconducono, entrambi, il problema a due di Dirichlet per la corona R. Il primo, esposto al n. 2, che è un'applicazione, con nuovi complementi (i teor. II e III), di quello che ho pubblicato fin dal 1929 [4]) per la risoluzione del problema di Dini-Neumann, nel piano, relativo ad un qualsivoglia dominio regolare a connessione non semplice, fornisce

---

[4]) M. Picone: *Sul problema di Neumann nel piano.* (Bollettino dell'Unione Mat. Italiana, vol. VIII (1929)). *Appunti d'Analisi superiore* [Rondinella, Napoli, pp. 360—367 della 1ª ed. (1940) e pp. 407—412 della 2ª ed. (1946)].

il teorema d'esistenza per la φ ed un certo metodo di calcolo delle φ_x e φ_y presentante alcune difficoltà, il secondo, esposto al n. 3, appare più idoneo al calcolo numerico, ma, pur avendo il pregio di far presagire la sua applicabilità alla risoluzione numerica di generali problemi di Dini-Neumann per domini qualsivogliano, la cui frontiera sia esclusivamente formata, nel caso del piano, da segmenti coordinati ed in quello dello spazio da rettangoli coordinati, urta contro altre difficoltà.

2. *Primo metodo di risoluzione del problema della torsione per il prisma cavo.* Conviene premettere i seguenti due teoremi della teoria delle funzioni armoniche in due variabili, uno dei quali (il teor. III) mi è stato suggerito da WOLF GROSS, valoroso collaboratore dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

II. *Sia A un campo del piano (x, y) di connessione uno, la cui frontiera sia costituita da due curve regolari semplici e chiuse C_0 e C, essendo C_0 interna a C. Se la funzione reale u è armonica in A e continua in $A+\mathrm{F}A$ e, detti (a_0, b_0) e (a, b) gl'intervalli dell'asse u costituiti dai valori che u assume, rispettivamente, su C_0 e C, tali intervalli sono privi di punti comuni, allora il flusso della u attraverso C_0*[5]*) è diverso da zero.*

Dimostrazione. Se il detto flusso fosse nullo, la u sarebbe dotata in A di coniugata v, pure essa armonica e monodroma in A, la funzione $f(z)=u+iv$, con $z=x+iy$, sarebbe olomorfa in A, e, non potendo essere costante, l'insieme degli zeri in A, della sua derivata $f'(z)=u_x-iu_y$, avrebbe punti d'accumulazione eclusivamente su $\mathrm{F}A$. Supposto, per esempio, $b_0<a$ siano k_1 e k_2 due costanti tali che $b_0<k_1<k_2<a$, O un punto interno a C_0. Su ogni raggio spiccato da O esiste un numero finito di punti, contenuti in A, nei quali u assume i valori k_1 o k_2. Le due curve Γ_1 e Γ_2, rispettivamente di equazione $u(x,y)=k_1$ e $u(x,y)=k_2$, prive di punti comuni, sono dunque entrambe chiuse ed inoltre regolari poichè su ciascuna di esse cade, al più, un numero finito di punti ove simultaneamente

---

[5]) Mi permetto di seguire la terminologia adottata nei miei *Appunti di Analisi superiore* (loc. cit ([4])), Cap. V della 1 e della 2 edizione.

si annullano u_x e u_y. Esse sono anche semplici, non potendo esistere in A una curva chiusa, che non abbia nel suo interno la C_0, sulla quale $u(x,y)$ è costante. Vi è certamente almeno un raggio r, spiccato da O, che ha in comune con Γ_1 un sol punto P_1, ed allora un punto di r riuscirà interno od esterno a Γ_1 secondochè è interno o esterno al segmento OP_1. Sul raggio r, esternamente al segmento OP_1, esiste certo un punto P_2 della curva Γ_2 e pertanto questa curva è esterna alla Γ_1. Dunque le curve Γ_1 e Γ_2 costituiscono la completa frontiera di un dominio regolare D contenuto in A. In ogni punto di un arco di FD, privo di punti singolari, si ha $dv/dn=0$, poichè, secondochè l'arco appartiene a Γ_1 oppure a Γ_2, si ha, lungo esso, $u=k_1$ oppure $u=k_2$, e quindi sempre $du/ds=0$. Ne segue la costanza di v in D, e ciò è assurdo.

III. *Assunto, nel piano (x,y), un sistema di coordinate polari ϱ e θ (ϱ raggio vettore e θ anomalia) avente l'asse x per asse polare, detta k una quantità positiva minore di 2, la funzione reale $u(x,y)$ sia continua nel settore circolare S definito dalle limitazioni $\varrho<\delta$, $0\leqslant\theta\leqslant k\pi$, armonica nell'interno e, designando a, b, c, d, quattro costanti, si abbia*

$$u=c(x^2+y^2)+ax+by+d, \quad \textit{per } \theta=0 \textit{ e per } \theta=k\pi, \tag{6}$$

sussiste allora per u uno sviluppo in serie, assolutamente ed uniformemente convergente in ogni cerchio di centro in O e raggio minore di δ, del tipo

$$u=u_0+d+a\varrho\cos\theta+b\varrho\,\mathrm{sen}\,\theta+c\varrho^2\cos 2\theta+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varrho^{\frac{n}{k}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n}{k}\,\theta\right),$$

ove le c_n sono costanti e

$$u_0\begin{cases} =c\,\mathrm{tang}\,k\pi\cdot\varrho^2\,\mathrm{sen}\,2\theta, & \text{per } (k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\neq 0,\\ =-\dfrac{2c}{k\pi}(\theta\cos 2\theta+\log\varrho\cdot\mathrm{sen}\,2\theta)\,\varrho^2 & \text{per } (k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})=0.\end{cases}$$

Pertanto, quando $(2k-1)(2k-3)\neq 0$, la u ha nell'intorno circolare del punto O, di raggio δ, le singolarità della funzione

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varrho^{\frac{n}{k}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n}{k}\,\theta\right),$$

vi è dunque priva di singolarità se k è reciproco di un numero naturale diverso da 2, se $k=\frac{1}{2}$ vi ha le singolarità di

$$-\frac{4c}{\pi}(\theta\cos 2\theta+\log\varrho\cdot\operatorname{sen} 2\theta)\varrho^2,$$

se $k=\frac{3}{2}$, le singolarità di

$$-\frac{4c}{3\pi}(\theta\cos 2\theta+\log\varrho\cdot\operatorname{sen} 2\theta)\varrho^2+$$

$$+\sum_{p=0}^{\infty}[c_{3p+1}\operatorname{sen}\nu_p\theta+c_{3p+2}\,\varrho^{\frac{2}{3}}\operatorname{sen}(\nu_p+\tfrac{2}{3})\,\theta]\,\varrho^{\nu_p},$$

ove $\nu_p=2p+\frac{2}{3}$.

Dimostrazione. Posto

$$v(\varrho,\theta)=u(\varrho,\theta)-[u_0(\varrho,\theta)+d+a\varrho\cos\theta+b\varrho\operatorname{sen}\theta+c\varrho^2\cos 2\theta],$$

si verifica subito che la funzione $v(\varrho,\theta)$ riesce continua in S e armonica nell'interno, avendosi $v=0$, per $\theta=0$ e per $\theta=k\pi$, e pertanto, la funzione

$$w(r,\tau)=v(r^k,k\tau),$$

continua nel semicerchio $r<\delta^{\frac{1}{k}}$, $0\leqslant\tau\leqslant\pi$, armonica nell'interno, identicamente nulla sul diametro $\tau=0$, $\tau=\pi$. In virtù di un classico teorema di SCHWARZ, la $w(r,\tau)$ risulta armonica nell'intorno dell'origine di raggio $\delta^{\frac{1}{k}}$ e vi ammette dunque lo sviluppo in serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_n\operatorname{sen} n\tau+c'_n\cos n\tau)\,r^n,$$

assolutamente ed uniformemente convergente in ogni cerchio con centro nell'origine, di raggio minore di $\delta^{\frac{1}{k}}$, avendosi $c'_n=0$ $(n=0,1,2,\dots,)$, per essere $w(r,0)\equiv 0$.

Ritorniamo ora a considerare la funzione torsionale φ. Per $p_0<a<p$ e $q_0<b<q$, si ha

$$\int_{FR_{ab}} \frac{du}{dn}\, ds = \int_{-b}^{b} \varphi_x(a, y)\, dy + \int_{-a}^{a} \varphi_y(x, b)\, dx -$$

$$- \int_{-b}^{b} \varphi_x(-a, y)\, dy - \int_{-a}^{a} \varphi_y(x, -b)\, dx,$$

ed ogni integrale al secondo membro di questa uguaglianza è nullo come integrale di una funzione dispari. La φ ha dunque flusso nullo attraverso $FR_{p_0q_0}$ e pertanto è dotata in R di funzione coniugata ψ. Questa riesce continua in $R+FR$ in virtú dell'uniforme sommabilità sui segmenti coordinati contenuti in R delle sue derivate $\psi_x = -\varphi_y$, $\psi_y = \varphi_x$. Data la continuità di ψ_y in $R+H$ e di ψ_x in $R+K$, si ha

$$\frac{d\psi}{dy} = y, \text{ su } H; \quad \frac{d\psi}{dx} = x, \text{ su } K,$$

e quindi, tenendo conto della continuità di ψ su FR,

$$\text{(7)} \qquad \psi = \gamma + \frac{x^2+y^2}{2}, \text{ su } FR_{pq}; \quad \psi = \gamma + \gamma_0 + \frac{x^2+y^2}{2}, \text{ su } FR_{p_0q_0},$$

ove γ_0 e γ designano due costanti. Ne segue, in forza del teorema di SCHWARZ già ricordato:

IV. *Il campo di regolarità Γ della funzione ψ e quindi della φ contiene $R+H+K = R+FR-V$.*

Denotiamo con $\psi_0(x,y)$ e $\chi(x,y)$ quelle ben determinate funzioni armoniche in R, continue in $R+FR$, che assumono su FR, la prima, i valori dei secondi membri delle (7), postovi $\gamma = \gamma_0 = 0$, la seconda, su $FR_{p_0q_0}$ costantemente il valore uno e su $FR_{p_0q_0}$ il valore zero. Si ha allora, in $R+FR$,

$$\psi = \gamma + \gamma_0\, \chi(x,y) + \psi_0(x,y),$$

e la parità di ψ, ψ_0, χ rispetto a x e a y, cioè, come diremo semplicemente, *la parità* di queste. Alla costante γ potremo dare e daremo il valore zero. La ψ deve avere flusso nullo attraverso la $FR_{p_0q_0}$, dovrà cioè aversi

$$\text{(8)} \qquad \gamma_0 \cdot \text{flusso}\, \chi + \text{flusso}\, \psi_0 = 0.$$

Quest'equazione determina γ_0, poichè, in virtù del teor. II, è flusso $\chi \neq 0$. Se è anche flusso $\psi_0 \neq 0$, e ciò, in base al teor. II, avverrà certo se $p_0^2+q_0^2<p^2$, la costante γ_0 risulterà non nulla.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema d'esistenza per il problema della torsione del prisma cavo:

V. *La funzione torsionale φ, della quale il teor. I ha dimostrato l'unicità, esiste, ha un campo di regolarità che contiene $R+\mathrm{F}R-V$ e le sue derivate φ_x, φ_y sono continue nei vertici di R_{pq} e, se infinitamente grandi in quelli di $R_{p_0q_0}$, lo sono d'ordine non superiore a 1/3 rispetto alla reciproca della distanza $\varrho(x, y)$ da V.*

Dimostrazione. La funzione armonica $\psi=\gamma_0\chi+\psi_0$, con γ_0 fornita dalla (8), ha un campo di regolarità Γ contenente $R+\mathrm{F}R-V$ e, in virtù del teor. III, derivate ψ_x, ψ_y continue nei vertici di R_{pq} e, nei vertici di $R_{p_0q_0}$, se infinitamente grandi, d'ordine non superiore a 1/3, rispetto a $1/\varrho$. Verificandosi la (8), la ψ è dotata in Γ di coniugata φ che risulta determinata prescrivendole il valore zero in un punto $(a, 0)$ dell'intervallo (ϱ_0, ϱ). Essendo $\varphi_x=\psi_y$, $\varphi_y=-\psi_x$, essa verifica le (1), comportandosi le sue derivate φ_x e φ_y, nei vertici di V, nel modo asserito dal teorema, risultando quindi queste uniformemente sommabili sui segmenti coordinati contenuti in R. La φ è dunque la ricercata funzione torsionale.

Osservazione. Occorre dare un metodo di calcolo delle derivate φ_x, φ_y, a mezzo delle quali si esprimono gli sforzi dovuti alla torsione, ed anzitutto uno per i limiti

$$\lim_{\varrho\to 0}{}'' [|\varphi_x| \varrho^{\frac{1}{3}}], \quad \lim_{\varrho\to p}{}'' [|\varphi_y| \varrho^{\frac{1}{3}}]$$ [6]).

Non possiedo, tuttora, alcuna nozione del valore di questi limiti. Dai lavori del KÖTTER [7]) e del TREFFTZ [8]) sulla torsione

[6]) Con le notazioni lim' e lim'', di uso molto più comodo delle $\underline{\lim}$ e $\overline{\lim}$ comunemente adottate, soglio indicare, ormai da più di un quarto di secolo, il minimo ed il massimo limite.

[7]) F. Kötter: *Über die Torsion des Winkeleisens* [Sitzungsberischte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, XXXIII (1908)].

[8]) E. Trefftz: *Über die Torsion prismatscher Stäbe von polygonalem Querschnitt* [Math. Annalem, 82 Bd (1921)]; *Über die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionspanungen in der inneren Ecke eines Winkeleisens* [Zts. f. Angew. Math. u. Mech., Bd. 2 (1922)].

del "ferro ad angolo" si possono trarre, per essi, soltanto delle presunzioni.

Quanto al calcolo delle φ_x e φ_y, si può pensare di effettuarlo attraverso quello della ψ e delle sue derivate $\psi_x = -\varphi_y$, $\psi_y = \varphi_x$, ciò che esige il calcolo delle due funzioni ψ_0 e χ e delle loro derivate parziali prime, molto approssimato, per queste ultime, su un fissato $R_{ab}(p_0 < a < p,\ q_0 < b < q)$, per ottenere la costante γ_0, verificante la (8), con la necessaria approssimazione. Ma le esperienze fatte, fin ad oggi, di tale metodo, all'Istituto nazionale per le Applicazioni del Calcolo, non hanno dato risultati che autorizzino a consigliarne l'adozione.

3. *Secondo metodo di risoluzione del problema della torsione per il prisma cavo.* Anche per l'esposizione di questo, dobbiamo premettere taluni teoremi per le funzioni armoniche nella corona R. Com'è noto [9]), ad ogni funzione $\omega(x, y)$, armonica in R, corrisponde una ben determinata constante $\alpha[\omega]$ e due ben determinate funzioni $u(x, y)$ e $u'(x, y)$, la prima armonica nel campo R_{pq} e la seconda nel campo $R'_{p_0q_0} = \mathrm{C}(R_{p_0q_0} + \mathrm{F}R_{p_0q_0})$ e infinitesima all'infinito, in modo che sussista, in R, la decomposizione in somma

$$(9) \qquad \omega(x, y) = \alpha \log \sqrt{x^2 + y^2} + u(x, y) + u'(x, y).$$

La costante α è il flusso della ω attraverso $\mathrm{F}R_{p_0q_0}$, la funzione u è detta la *componente armonica di* ω *regolare in* R_{pq} e la u' la *componente armonica regolare in* $R'_{p_0q_0}$, *infinitesima all'infinito*. Date l'unicità della decomposizione (9) e la circostanza che le funzioni $\omega(\pm x, \pm y)$, $u(\pm x, \pm y)$, $u'(\pm x, \pm y)$ sono armoniche, rispettivamente, in R, R_{pq}, $R'_{p_0q_0}$, si ha che se ω è pari rispetto ad una delle variabili tali sono u e u', e se è dispari, tali sono u e u' e risulta $\alpha = 0$. Posto

$$z = x + iy, \quad z_0 = x - iy,$$

riescono determinate due successioni di costanti

$$\alpha_0[\omega], \alpha_1[\omega], \beta_1[\omega], \ldots, \alpha'_1[\omega], \beta'_1[\omega], \ldots,$$

tali che nell'intorno circolare Γ dell'origine avente per raggio la minore fra le quantità p e q sussiste per la u lo sviluppo

---

[9]) Cfr., per esempio, Picone: *Appunti d'Analisi superiore* [loc. cit. (4)], p. 293 della 1ª ediz. e p. 402 della 2ª ediz.

in serie

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}[\alpha_k(z^k+z_0^k)+\beta_k(z^k-z_0^k)],$$

e nel campo Γ' complementare del cerchio avente centro nell'origine e raggio $(p_0^2+q_0^2)^{1/2}$, per u' lo sviluppo

$$u'(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha'_k\left(\frac{1}{z^k}+\frac{1}{z_0^k}\right)+\beta'_k\left(\frac{1}{z^k}-\frac{1}{z_0^k}\right)\right],$$

e, se n è pari,

$$(10)\quad u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k}(z^{2k}+z_0^{2k}),\quad u'(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha'_{2k}\left(\frac{1}{z^{2k}}+\frac{1}{z_0^{2k}}\right),$$

e se è dispari

$$(11)\quad \alpha=0,\quad u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{2k}(z^{2k}-z_0^{2k}),$$

$$u'(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta'_{2k}\left(\frac{1}{z^{2k}}-\frac{1}{z_0^{2k}}\right).$$

Sussistono i seguenti teoremi:

VI. *Se la funzione $\omega(x,y)$, armonica in R, è pari, comunque si assumano le costanti a e b, con $p_0<a<p$, $q_0<b<q$, posto*

$$(12)\quad F_{ab}[\omega]=\int_0^b\omega_x(a,y)\,dy+\int_0^a\omega_y(x,b)\,dx,$$

si ha

$$\alpha[\omega]=\frac{2}{\pi}F_{ab}[\omega].$$

Dimostrazione. Detta n la normale esterna alla FR_{ab}, risulta, data la parità di ω,

$$\int_{FR_{ab}}\frac{du}{dn}\,ds=\int_{-b}^{b}\omega_x(a,y)\,dy+\int_{-a}^{a}\omega_y(x,b)\,dx-\int_{-b}^{b}\omega_x(-a,y)\,dy-$$

$$-\int_{-a}^{a}\omega_y(x,-b)\,dx=4\int_0^b\omega_x(a,y)\,dy+4\int_0^a\omega_y(x,b)\,dx.$$

VII. *Se la funzione* $\omega(x, y)$ *armonica in* R, *è pari, posto, per* $p_0 < a < p$, $q_0 < b < q$,

$$X_{ab}[\omega] = a \int_0^b \omega(a, y)\, dy - \frac{a^2}{2} \int_0^b \omega_x(a, y)\, dy - \tag{13}$$

$$- \int_0^a \omega_y(x, b) \frac{x^2}{2}\, dx ,$$

$$Y_{ab}[\omega] = b \int_0^a \omega(x, b)\, dx - \frac{b^2}{2} \int_0^a \omega_y(x, b)\, dx - \tag{14}$$

$$- \int_0^b \omega_x(a, y) \frac{y^2}{2}\, dy ,$$

$$G_{ab}[\omega] = X_{ab}[\omega] - Y_{ab}[\omega] , \tag{15}$$

si ha

$$a_2'[\omega] = \frac{1}{\pi} G_{ab}[\omega] .$$

Dimostrazione. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial a} X_{ab}[\omega] = \int_0^b \omega(a, y)\, dy - \frac{a^2}{2} \int_0^b \omega_{xx}(a, y)\, dy - \omega_y(a, b) \frac{a^2}{2} =$$

$$= \int_0^b \omega(a, y)\, dy + \frac{a^2}{2} \int_0^b \omega_{yy}(a, y)\, dy - \omega_y(a, b) \frac{a^2}{2} = \int_0^b \omega(a, y)\, dy ,$$

$$\frac{\partial}{\partial a} Y_{ab}[\omega] = \int_0^b \omega(a, y)\, dy ,$$

$$\frac{\partial}{\partial b} X_{ab}[\omega] = \frac{\partial}{\partial b} Y_{ab}[\omega] = \int_0^a \omega(x, b)\, dx ,$$

onde segue che $G_{ab}[\omega]$ non dipende nè da a nè da b. Dalla (9) si deduce

$$G_{ab}[\omega] = \alpha G_{ab}[\log \sqrt{x^2 + y^2}] + G_{ab}[u] + G_{ab}[u'] ,$$

ed è

$$G_{ab}[\log\sqrt{x^2+y^2}] = G_{aa}[\log\sqrt{x^2+y^2}] = 0\,,$$

$$G_{ab}[u] = \lim_{a\to 0} G_{aa}[u] = 0\,, \quad G_{ab}[u'] = \lim_{a\to\infty} G_{aa}[u']\,,$$

e, per $2a^2 > p_0^2 + q_0^2$,

$$G_{aa}[u'] = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha'_{2k}(G_{aa}[z^{-2k}] + G_{aa}[z_0^{-2k}]).$$

Ora

$$X_{aa}[z^{-2k}] = a\int_0^a \frac{dy}{(a+iy)^{2k}} + ka^2\int_0^a \frac{dy}{(a+iy)^{2k+1}} + ki\int_0^a \frac{x^2\,dx}{(x+ia)^{2k+1}},$$

$$|X_{aa}[z^{-2k}]| = |X_{aa}[z_0^{-2k}]| < (2k+1)\,a\int_0^a \frac{dy}{(a^2+y^2)^k} =$$

$$= \frac{2k+1}{a^{2k-2}}\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^k}\,,$$

donde, per $k>1$

$$\lim_{a\to\infty} X_{aa}[z^{-2k}] = \lim_{a\to\infty} X_{aa}[z_0^{-2k}] = 0\,,$$

e allo stesso modo si trova che per $k>1$,

$$\lim_{a\to\infty} Y_{aa}[z^{-2k}] = \lim_{a\to\infty} Y_{aa}[z_0^{-2k}] = 0$$

onde segue, per $k>1$, $G_{aa}[z^{-2k}] = G_{aa}[z_0^{-2k}] = 0$, laddove

$$G_{aa}[z^{-2} + z_0^{-2}] = 4a\int_0^a \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx + 4a^3\int_0^a \frac{a^2-3x^2}{(a^2+x^2)^3}\,dx -$$

$$-4a\int_0^a \frac{a^2-3x^2}{(a^2+x^2)^3}\,x^2dx = 8\int_0^1 \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^3}\,dt = \pi\,.$$

VIII. *Assegnata una funzione $\omega(x, y)$, armonica in R e pari, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione τ, del pari armonica in R, verificante l'equazione*

(16) $$\tau_{xy} = \omega\,,$$

è che riesca

$$F_{ab}[\omega] = G_{ab}[\omega] = 0 . \tag{17}$$

Soddisfatte queste condizioni, esiste una ed una sola funzione $\tau^*(x, y)$ armonica in R e dispari, verificante la (16) *e tutte le soluzioni armoniche di questa sono date dalla formula*

$$\tau = \gamma_0 + \gamma_1(z + z_0) + \delta_1(z - z_0) + \gamma_2(z^2 + z_0^2) + \tau^*(x, y), \tag{18}$$

essendo $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1$, costanti arbitrarie.

Dimostrazione. Porremo, da ora in poi, $a = \frac{p_0 + p}{2}$, $b = \frac{q_0 + q}{2}$ e indicheremo con A il campo dei punti di R per cui $p_0 < x < p$, con B quella per cui $q_0 < y < q$, con A_0 e B_0 i simmetrici di A e B rispetto agli assi y e x. Osserviamo, anzitutto, che se $\bar{\tau}(x, y)$ è una fissata soluzione, armonica in R, della (16), per ogni altra tale soluzione τ, risulterà $(\tau - \bar{\tau})_{xy} = 0$ e quindi, in AB, $\tau - \bar{\tau} = \xi(x) + \eta(y)$, con ξ funzione della sola x e η della sola y, e per l'armonicità di $\tau - \bar{\tau}$, $\xi''(x) = -\eta''(y)$, onde segue, in AB e quindi in tutto R,

$$\tau = \bar{\tau} + \gamma_0 + \gamma_1(z + z_0) + \delta_1(z - z_0) + \gamma_2(z^2 + z_0^2),$$

con $\gamma_0, \gamma_1, \delta_1, \gamma_2$ costanti che si possono scegliere ad arbitrio. Con ciò è già dimostrata la formula risolutiva (18). La ridimostreremo, con la necessità delle (17) e con l'unicità della $\tau^*(x, y)$, al modo seguente. Sussistono, per la ω, la (9) e le (10) e si ponga

$$\tau = \gamma \log \sqrt{x^2 + y^2} + v(x, y) + v'(x, y),$$

essendo v la componente armonica di τ regolare in R_{pq} e v' quella regolare in $R'_{p_0 q_0}$ e infinitesima all'infinito. Risulterà

$$\tau_{xy} = \frac{\gamma}{i}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_0^2}\right) + v_{xy}(x, y) + v'_{xy}(x, y),$$

e pertanto, perchè possa essere soddisfatta la (16), deve aversi $F_{ab}[\omega]=0$,

(19) $$v_{xy}(x,y)=u(x,y), \quad v'(x,y)+\frac{\gamma}{i}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z_0^2}\right)=u'(x,y).$$

Si abbia, in Γ e in Γ', rispettivamente,

$$v=\sum_{k=0}^{\infty}[\gamma_k(z^k+z_0^k)+\delta_k(z^k-z_0^k)],$$

$$v'=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\gamma'_k\left(\frac{1}{z^k}+\frac{1}{z_0^k}\right)+\delta'_k\left(\frac{1}{z^k}-\frac{1}{z_0^k}\right)\right],$$

risulterà, ivi,

$$v_{xy}=4\delta_2 i+i\sum_{k=3}^{\infty}k(k-1)[\gamma_k(z^{k-2}-z_0^{k-2})+\delta_k(z^{k-2}+z_0^{k-2})],$$

$$v'_{xy}=i\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)\left[\gamma'_k\left(\frac{1}{z^{k+2}}-\frac{1}{z_0^{k+2}}\right)+\delta'_k\left(\frac{1}{z^{k+2}}+\frac{1}{z_0^{k+2}}\right)\right],$$

e quindi, affinchè vi sussistano le (19), $\gamma=0$, $\gamma_k=0$ (per $k\geqslant 3$) $\gamma'_k=0$ (per $k\geqslant 1$), $\delta_{2k+1}=0$ (per $k\geqslant 1$), $\delta'_{2k+1}=0$ (per $k\geqslant 0$),

$$2k(2k-1)\delta_{2k}i=\alpha_{2k-2}, \quad 2k(2k+1)\delta'_{2k}i=\alpha'_{2k+2}, \quad \text{per } k\geqslant 1,$$
$$\alpha'_2=0.$$

Deve dunque essere $G_{ab}[\omega]=0$ e, in Γ e in Γ' rispettivamente,

$$v=\gamma_0+\gamma_1(z+z_0)+\delta_1(z-z_0)+\gamma_2(z^2+z_0^2)+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{2k-2}\frac{z^{2k}-z_0^{2k}}{i\,2k(2k-1)},$$

$$v=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha'_{2k+2}\frac{z^{-2k}-z_0^{-2k}}{i\,2k(2k+1)},$$

rimanendo le costanti $\gamma_0, \gamma_1, \delta_1, \gamma_2$ affatto arbitrarie e determinata, per $\gamma_0=\gamma_1=\delta_1=\gamma_2=0$, la soluzione armonica dispari della (16).

Dimostreremo la sufficienza delle condizioni (17), costruendo, suppostele soddisfatte, la soluzione della (16), armonica in R e dispari. Per una tale soluzione deve, necessariamente, aversi, in $B+B_0$,

$$\tau_y(x, y) = \int_0^x \omega(s, y)\, ds, \tag{20}$$

e, in $A+A_0$,

$$\tau_x(x, y) = \int_0^y \omega(x, t)\, dt. \tag{21}$$

Le τ_y e τ_x, date dalle (20) e (21), riescono armoniche in $B+B_0$ e in $A+A_0$. Si ha, invero, per esempio, in $B+B_0$,

$$\Delta\tau_y = \omega_x(x, y) + \int_0^x \omega_{yy}(s, y)\, ds =$$

$$= \omega_x(x, y) - \int_0^x \omega_{xx}(s, y)\, ds = \omega_x(0, y) = 0.$$

Deve pure aversi, in A,

$$\tau_y(x, y) = \int_a^x \omega(s, y)\, ds + \eta(y), \tag{22}$$

con $\eta(y)$ tale funzione di y da risultare $\Delta\tau_y = 0$ e da fornire per $\tau_y(x, b)$ e $\tau_{yy}(x, b)$ i valori che fornisce la (20) in AB. Si traggono così per $\eta(y)$ le equazioni

$$\eta''(y) + \omega_x(a, y) = 0,$$

$$\eta(b) = \int_0^a \omega(s, b)\, ds, \quad \eta'(b) = \int_0^a \omega_y(s, b)\, ds, \tag{23}$$

e quindi, in A,

$$\begin{aligned} \tau_y = {} & \int_0^a \omega(s, b)\, ds + (y-b)\int_0^a \omega_y(s, b)\, ds - \\ & - \int_b^y (y-t)\, \omega_x(a, t)\, dt + \int_a^x \omega(s, y)\, ds. \end{aligned} \tag{24}$$

In virtù delle (23) la τ_y, data in A dalla (24), coincide, in AB, con la τ_y, data in B dalla (20), ed ora verificheremo che essa, in AB_0, coincide con la τ_y data in B_0 dalla (20) stessa. Basta perciò accertare che, calcolando, valendosi della (24), τ_y e τ_{yy} per $y = -b$, si trova, rispettivamente,

$$\int_0^x \omega(s, -b)\, ds, \quad \int_0^x \omega_y(s, -b)\, ds.$$

Tale accertamento è immediato, in virtù della $F_{ab}[\omega] = 0$ e della parità di ω. Osserviamo che la τ_y, data in A dalla (24), ivi armonica, risulta pari in y; si ha, invero,

$$\tau_{yy}(x, 0) = \int_0^a \omega_y(s, b)\, ds - \int_b^0 \omega_x(a, t)\, dt + \int_a^x \omega_y(s, 0)\, ds = F_{ab}[\omega] = 0,$$

e che, pertanto, τ_{yy} è funzione dispari di y. Dalla (16) si trae, in B,

$$\tau_x(x, y) = \int_b^y \omega(x, t)\, dt + \xi(x),$$

con $\xi(x)$ tale funzione di x da risultare $\Delta\tau_x = 0$ e da fornire per $\tau_x(x, a)$ e $\tau_{xx}(x, a)$ i valori che fornisce la (21) in AB. Ne segue, in B,

$$\tau_x = \int_0^b \omega(a, t)\, dt + (x - a) \int_0^b \omega_x(a, t)\, dt - \tag{25}$$
$$- \int_a^x (x - s)\, \omega_y(s, b)\, ds + \int_b^y \omega(x, t)\, dt,$$

e si verifica, come sopra, che tale τ_x coincide in BA_0 con quella fornita in A_0 dalla (21), risultando funzione pari di x. Ripetendo lo stesso calcolo per τ_y in A_0 e τ_x in B_0, si trova

$$\tau_y(x, y)\, (\text{in } A_0) = -\tau_y(-x, y), \quad \tau_x(x, y)\, (\text{in } B_0) = -\tau_x(x, -y),$$

pervenendo, così, alla definizione, in R, di due funzioni ivi armoniche τ_x e τ_y, la prima pari in x e dispari in y, la seconda dispari in x e pari in y, per le quali si ha identicamente

$\frac{\partial \tau_x}{\partial y} = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} = \omega$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione τ continua in R verificante ivi la (16), è, dunque, che per le ottenute funzioni τ_x e τ_y, riesca

$$(26) \qquad \begin{aligned} &\int_{+FR_{ab}} [\tau_x(x,y)\,dx + \tau_y(x,y)\,dy] = \\ &= 4\int_0^b \tau_y(a,y)\,dy - 4\int_0^a \tau_x(x,b)\,dx = 0\,. \end{aligned}$$

Ma si trova

$$\int_0^a \tau_x(x,b)\,dx = X_{ab}[\omega]\,, \quad \int_0^b \tau_y(a,y)\,dy = Y_{ab}[\omega]\,,$$

onde la (26) è verificata in virtù della $G_{ab}[\omega]=0$. Se si vuole che τ riesca funzione dispari, occorre prescriverle nel punto $(a,0)$ il valore zero, in seguito a che si avrà, in R,

$$(27) \qquad \tau = (C)\int_{(a,0)}^{(x,y)} [\tau_x(s,t)\,ds + \tau_y(s,t)\,dt]\,,$$

C designando una qualsivoglia curva regolare contenuta in R, congiungente il punto $(a,0)$ col punto (x,y). In virtù della $G_{ab}[\omega]=0$ è facile verificare che la τ fornita dalla (27) è dispari. Si ha, invero, a norma della (27), data la disparità di τ_x rispetto a y,

$$\tau(x,0) = \int_a^x \tau_x(s,0)\,ds = 0\,,$$

e quindi, in A,

$$\tau(x,y) = \int_0^y \tau_y(x,t)\,dt\,,$$

donde, per la parità di τ_y, rispetto a y, la disparità di τ, in A, rispetto a y, si ha, in B, a norma della (27),

$$\tau = \int_0^y \tau_y(a,t)\,dt + \int_a^x \tau_x(s,y)\,ds\,,$$

e quindi

$$\tau(0,y)=\int_0^y \tau_y(a,t)\,dt+\int_a^0 \tau_x(s,y)\,ds=G_{ay}[\omega]=0,$$

e pertanto, in B,

$$\tau(x,y)=\int_0^x \tau_x(s,y)\,ds,$$

donde la disparità ivi di τ rispetto a x. Ecc. Quanto all'armonicità di τ, essa segue da quella di τ_x e di τ_y, dalla quale si deduce $\frac{\partial \Delta\tau}{\partial x}=\frac{\partial \Delta\tau}{\partial y}=0$ e quindi che $\Delta\tau$ ha valore costante in R, che deve essere nullo, data la disparità di $\Delta\tau$.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema concernente il problema del prisma cavo.

IX. *Esiste ed è unica una funzione $\omega(x,y)$, armonica in R e pari, continua in $R+H+K$, verificante le equazioni*

$$\omega\begin{cases}=\ \ 1, & \text{su } H,\\ =-1, & \text{su } K,\end{cases}\tag{28}$$

$$F_{ab}[\omega]=G_{ab}[\omega]=0,\tag{17}$$

e tale che le funzioni ω_1 e ω_2 definite in R al modo seguente

$$\left\{\begin{aligned}&\omega_1=\int_0^x \omega(s,y)\,ds, \text{ in } B+B_0;\\ &\omega_1=\int_0^a \omega(s,b)\,ds+(y-b)\int_0^a \omega_y(s,b)\,ds-\int_b^y (y-t)\,\omega_x(a,t)\,dt+\\ &+\int_a^x \omega(s,y)\,ds, \text{ in } A;\quad \omega_1(x,y)=-\omega_1(-x,y), \text{ in } A_0;\end{aligned}\right.\tag{29}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\omega_2=\int_0^y \omega(x,t)\,dt, \text{ in } A+A_0;\\ &\omega_2=\int_0^b \omega(a,t)\,dt+(x-a)\int_0^b \omega_x(a,t)\,dt-\int_a^x (x-s)\,\omega_y(s,b)\,ds+\\ &+\int_b^y \omega(x,t)\,dt, \text{ in } B;\quad \omega_2(x,y)=-\omega_2(x,-y), \text{ in } B_0,\end{aligned}\right.\tag{30}$$

riescano uniformemente sommabili sui segmenti coordinati contenuti in R. Costruita una tale funzione esiste, a norma del teor. VIII, una ben determinata funzione φ, armonica in R e dispari, per la quale si ha $\varphi_{xy} = \omega$, e questa è la funzione torsionale.

Dimostrazione. La funzione torsionale φ ha, come abbiamo visto, un campo di regolarità contenente $R + \mathrm{F}R - V$ ed in tale campo risulta φ_{xy} armonica, regolare e pari, mentre dalle (1) si ricava $\varphi_{xy} = 1$ su H; $\varphi_{xy} = -1$, su K, ed in virtù del teor. VIII, che $F_{ab}[\varphi_{xy}] = G_{ab}[\varphi_{xy}] = 0$. Sostituendo poi φ_{xy} in luogo di ω nelle (29) e (30) si trova $\omega_1 = \varphi_y$, $\omega_2 = \varphi_x$, onde segue la uniforme sommabilità di ω_1 e ω_2 sui segmenti coordinati contenuti in R. Dunque una funzione ω che ha tutte le proprietà prescrittele dal teorema è data dalla φ_{xy}. Sia, viceversa, ω una funzione che possieda tutte queste proprietà. Essa, in virtù del teorema di SCHWARZ, è armonica e regolare in un campo contenente $R + \mathrm{F}R - V$, ed esiste, in forza del teor. VIII, una funzione φ armonica e dispari in R, ivi verificante le equazioni

$$\varphi_{xy} = \omega, \quad \varphi_y = \omega_1, \quad \varphi_x = \omega_2 .$$

Si ha la continuità di φ_x in $R + H$, di φ_y in $R + K$,

$$\varphi_x = \int_0^y dt = y, \text{ su } H; \quad \varphi_y = -\int_0^x dt = -x, \text{ su } K,$$

nonchè la uniforme sommabilità di φ_x e φ_y sui segmenti coordinati contenuti in R. Tale funzione φ è dunque la funzione torsionale. Siano ora ω' e ω'' due funzioni che possiedano le proprietà prescritte dal teorema alla ω, ciascuna di essa fornisce, al modo ora indicato, la funzione torsionale φ, e si ha perciò $\omega' = \omega'' = \varphi_{xy}$. Osserviamo ora l'ulteriore teorema:

X. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè, per una funzione ω, armonica in R e pari, continua in $R + H + K$, verificante le equazioni* (17) *e* (28), *le funzioni ω_1 e ω_2, definite dalle* (29) *e* (30), *riescano uniformemente sommabili sui segmenti coordinati*

contenuti in R, è che essa sia limitata nelle vicinanze di ciascun vertice di R_{pq} e, se infinitamente grande nei vertici di $R_{p_0 q_0}$ lo sia d'ordine non superiore a 4/3, rispetto alla reciproca della distanza $\varrho(x, y)$ da V.

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Supposto, invero, che per la funzione ω, armonica in R e pari, continua in $R+H+K$ e verificante le equazioni (17) e (28), le funzioni ω_1 e ω_2 siano uniformemente sommabili sui segmenti coordinati contenuti in R, il teorema precedente ci assicura che, in R, risulta $\omega=\varphi_{xy}$, essendo φ la funzione torsionale, la cui coniugata ψ ha, per il teorema III in un intorno circolare $C(-p, -q)$ del vertice $(-p, -q)$ di R_{pq} le singolarità di

$$-\frac{2}{\pi}(\theta \cos 2\theta + \log \varrho \cdot \operatorname{sen} 2\theta)\varrho^2,$$

designando ϱ la distanza del punto (x, y) dal punto $(-p, -q)$ e θ l'anomalia del raggio vettore che dal punto $(-p, -q)$ va al punto (x, y), rispetto all'asse con l'origine in $(-p, -q)$ avente direzione e verso dell'asse x, e in un intorno circolare $C(p_0, q_0)$ del vertice (p_0, q_0) di $R_{p_0 q_0}$ le singolarità di

$$-\frac{2}{3\pi}(\theta \cos 2\theta + \log \varrho \cdot \operatorname{sen} 2\theta)\varrho^2 + \\ + \sum_{p=0}^{\infty} [c_{3p+1} \operatorname{sen} \nu_p \theta + c_{3p+2}\,\varrho^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen}(\nu_p + \tfrac{2}{3})\theta]\,\varrho^{\nu_p},$$

ove $\nu_p = 3p + \frac{2}{3}$, designando ϱ la distanza del punto (x, y) dal punto (p_0, q_0) e θ l'anomalia del raggio vettore che dal punto (p_0, q_0) va al punto (x, y), rispetto all'asse con l'origine in (p_0, q_0) avente la direzione dell'asse y e verso contrario. Ne segue, per essere $\omega=\varphi_{xy}=-\psi_{yy}=\psi_{xx}$ la limitatezza di ω in $C(-p, -q)$ e che se essa è in (p_0, q_0) infinitamente grande lo è d'ordine non superiore a 4/3 rispetto a $1/\varrho$, e, precisamente, di tale ordine se è $c_1 \neq 0$, d'ordine 2/3 se è $c_1=0$ e $c_2 \neq 0$, limitata in $C(p_0, q_0)$ se è $c_1=c_2=0$.

La condizione è sufficiente. Dobbiamo dimostrare che se la funzione ω, armonica in R e pari, continua in $R+H+K$, verificante le (17) e (28), è limitata nelle vicinanze di ciascun

vertice di R_{pq} e, se infinitamente grande nei vertici di $R_{p_0 q_0}$, lo è d'ordine non superiore a $4/3$, rispetto a $1/\varrho$, le funzioni ω_1 e ω_2 riescono uniformemente sommabili sui segmenti coordinati contenuti in R. Essendo tale uniforme sommabilità evidente in $R-R_{ab}$, risultando ω_1 e ω_2 continue in $R+\mathrm{F}R-R_{ab}$, ci limiteremo a dimonstrarla in $R^{ab}_{p_0 q_0}$ e considereremo, per esempio, la ω_1 in $B\cdot R^{ab}_{p_0 q_0}$ e per $x \geqslant 0$. Si abbia ivi, detta ϱ la distanza del punto (x,y) dal punto (p_0, q_0), $|\omega| \leqslant M/\varrho^{4/3}$, ne seguirà, per $x < p_0$,

$$|\omega_1| = \left| \int_0^x \omega(s,y)\,ds \right| \leqslant M \int_0^x \frac{ds}{(p_0-s)^{4/3}} = \frac{3M}{(p_0-x)^{1/3}} - \frac{3M}{p_0},$$

e, per $x > p_0$, detto N un numero positivo non superato da $|\omega(x,b)|$, $|\omega_y(x,b)|$, $|\omega_x(a,y)|$,

$$|\omega_1| = \left| \int_0^a \omega(s,b)\,ds + (y-b)\int_0^a \omega_y(s,b)\,ds - \right.$$

$$\left. - \int_b^y (y-t)\,\omega_x(a,t)\,dt + \int_a^x \omega(s,y)\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant aN + (1-q_0)\,aN + N\frac{(b-q_0)^2}{2} + M\int_x^a \frac{ds}{(s-p_0)^{4/3}}.$$

Esiste dunque una costante positiva L, per la quale risulta, in $B\cdot R^{ab}_{p_0 q_0}$ e per $x \neq p_0$,

$$|\omega_1| < \frac{L}{|x-p_0|^{1/3}},$$

e ciò prova l'uniforme sommabilità di ω_1 sui segmenti contenuti in $B\cdot R^{ab}_{p_0 q_0}$, paralleli all'asse x. Sia ora I un segmento, contenuto in $B\cdot R^{ab}_{p_0 q_0}$, parallelo all'asse y e denotiamo con $T(I)$ il rettangolo limitato da I, dalle proiettanti gli estremi di I, ortogonalmente, sull'asse y e da quest'asse, con $C(\varrho)$ l'intorno circolare del punto (p_0, q_0) di raggio ϱ, si ha

$$
(31)\quad
\begin{aligned}
&\int_I |\omega_1|\, dy \leqslant \iint_{T(I)} |\omega(x,y)|\, dx\, dy = \\
&= \iint_{T(I)-C(\varrho)} |\omega(x,y)|\, dx\, dy + \iint_{T(I)\, C(\varrho)} |\omega(x,y)|\, dx\, dy < \\
&< \iint_{T(I)-C(\varrho)} |\omega(x,y)|\, dx\, dy + M \iint_{C(\varrho)} \varrho^{-\frac{4}{3}}\, dx\, dy = \\
&= \iint_{T(I)-C(\varrho)} |\omega(x,y)|\, dx\, dy + 2\pi M \varrho^{\frac{2}{3}} .
\end{aligned}
$$

Assunto ad arbitrio un numero positivo ε, denotiamo con ϱ_ε un numero positivo tale che si abbia $2\pi M \varrho_\varepsilon^{2/3} < \varepsilon/2$ e con N_ε il massimo di $|\omega|$ in $B \cdot R^{ab}_{p_0 q_0} - C(\varrho_\varepsilon)$, se I ha lunghezza minore di $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2(a - p_0) N_\varepsilon$, risulta, in base alle (31),

$$\int_I |\omega_1|\, dy < \varepsilon ,$$

e sussiste dunque anche l'uniforme sommabilità di ω_1 sui segmenti contenuti in $B \cdot R^{ab}_{p_0 q_0}$, paralleli all'asse y. Risultato definitivo della ricerca è pertanto il teorema:

XI. *Esiste ed è unica una funzione* $\omega(x, y)$, *armonica in* R *e pari, continua in* $R + H + K$, *verificante le equazioni* (17) *e* (28) *limitata nelle vicinanze di ciascun vertice di* R_{pq} *e, se infinitamente grande nei vertici di* $R_{p_0 q_0}$, *d'ordine non superiore a* 4/3, *rispetto alla reciproca della distanza* $\varrho(x, y)$ *da* V. *Costruita una tale funzione, si può calcolare, a norma del teor. VIII, una funzione* φ, *armonica in* R *e dispari, per la quale si ha, ivi,* $\varphi_{xy} = \omega$, *e questa è la funzione torsionale.*

Osservazioni. La risoluzione del problema della torsione del prisma cavo è dunque ricondotta al calcolo della *sola* funzione ω della quale il teor. XI assicura l'esistenza e l'unicità. Essa è soluzione di un problema di Dirichlet di un nuovo tipo, assai interessante.

Conseguito il calcolo di tale funzione, quello delle derivate φ_x e φ_y della funzione torsionale si ha per mezzo delle

semplici formule (cfr. la dimostrazione del teor. VIII)

$$(32)\qquad \begin{aligned} \varphi_x &= \int_0^y \omega(x,t)\,dt, \quad \text{in } A+A_0; \\ \varphi_y &= \int_0^x \omega(s,y)\,ds, \quad \text{in } B+B_0. \end{aligned}$$

Se le funzioni approssimanti ω, nel calcolo istituito per questa, sono armoniche, o almeno analitiche, in R, ottenute, mediante le (32), le approssimanti φ_x, in $A+A_0$ e φ_y, in $B+B_0$, si avranno pure, per prolungamenti, le approssimanti φ_x, in $B+B_0$ e φ_y, in $A+A_0$. Le (32) hanno il grande pregio di fornire una sicura maggiorazzione dell'errore di cui sono affette le approssimanti φ_x e φ_y, non appena sia stato maggiorato quello delle approssimanti ω.

Ma mi è tuttora ignoto come pervenire a ciò.

Esiste ed è unica[10]) une funzione $\overline{\omega}$, armonica e *limitata* in R, continua in $R+H+K$, verificante le uniche condizioni al contorno (28), e per questa, che riesce pari, si sa costruire una successione $\{\omega^{(k)}\}$ di funzioni armoniche che l'approssimano, puntualmente ed uniformemente, in ogni insieme chiuso contenuto in R, avendosi $\lim F_{ab}[\omega^{(k)}]$ (per $k\to\infty$) $=F_{ab}[\overline{\omega}]$, $\lim G_{ab}[\omega^{(k)}]$ (per $k\to\infty$) $=G_{ab}[\overline{\omega}]$. Se si dimostrasse che

$$(33)\qquad \lim_{k\to\infty} F_{ab}[\omega^{(k)}] = \lim_{k\to\infty} G_{ab}[\omega^{(k)}] = 0,$$

se ne dedurrebbe che $\overline{\omega}$ è la funzione della quale il teor. XI assicura l'esistenza e l'unicità e si concluderebbe che gli sforzi ai quali è sottoposto nella torsione il prisma cavo sono, addirittura, funzioni continue in tutto $R+\mathrm{F}R$. Alcuni calcoli di esplorazione compiuti all'Istituto nazionale per le Applicazioni del calcolo non hanno ancora condotto ad escludere la possibilità delle (33).

Osserviamo, infine, che se il prisma ha per sezione una corona limitata dai contorni di due quadrati concentrici omote-

---

[10]) Jules Riemann, *Sur le problème de Dirichlet* [Annales de l'Ecole normale Supérieure, t. 5 (1888)].

tici rispetto al centro, se cioè $p_0 = q_0$ e $p = q$, detta $\omega(x, y)$ una funzione che possieda le proprietà considerate nel teor. XI, le possiede anche $-\omega(y, x)$ e si ha pertanto $\omega(y, x) = -\omega(x, y)$ e quindi $\omega_y(y, x) = -\omega_x(x, y)$,

$$F_{ab}[\omega] = F_{aa}[\omega] = \int_0^a \omega_x(a, y)\, dy + \int_0^a \omega_y(x, a)\, dx =$$

$$= \int_0^a \omega_x(a, y)\, dy - \int_0^a \omega_x(a, x)\, dx = 0,$$

ed é dunque allora, sempre verificata una delle (17).



Table des matières
